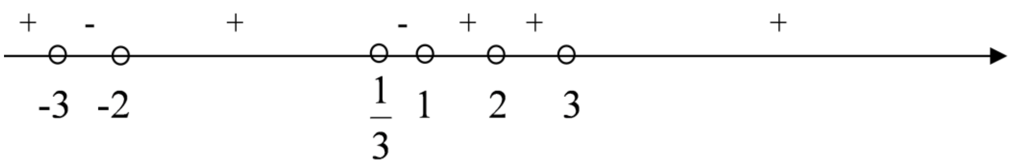
1. Розв’язати нерівність: $\left|\tilde{o}^2 - 4x + 1\right| < 2x + 1.$

Дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} \tilde{o}^2 - 4x + 1 < 2x + 1 \\ -\left(\tilde{o}^2 - 4x + 1\right) < 2x + 1 \end{cases}$. Після спрощення отримаємо: $\begin{cases} x^2 - 6x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6).$

Відповідь: $x \in (0; 6)$.

2. Розв’язати нерівність $\dfrac{(x-1)^3\left(x^2-4\right)^2\left(x^2-9\right)^3\left(x^2+1\right)}{(1-3x)\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-3x+16\right)} < 0.$

Розкладемо вирази на множники і змінимо знак виразу $(1-3x)$ на протилежний. Зауважимо, що $x^2 - 3x + 16 > 0$ та $x^2 + 1 > 0$ для всіх дійсних значень змінної, тому ці множники можна виключити. Інші квадратні тричлени розкладемо на лінійні множники. В результаті будемо мати: $\dfrac{(x-1)^3(x-2)^2(x+2)^2(x-3)^3(x+3)^3}{(3x-1)(x+2)(x-3)} > 0$. Нанесемо значення змінної, в яких чисельник чи знаменник перетворюється в нуль, на числову пряму. Для $x > 3$ дріб набуває додатних значень. Знайдемо знак на кожному з решти проміжків, враховуючи степінь кожної дужки (якщо непарний, то знак змінюється, а для парного – ні). При цьому звернемо увагу, що вирази $(x+2)$ та $(x-3)$ зустрічаються і в чисельнику, і в знаменнику (тоді шукаємо знак їх частки).



Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-2; \dfrac{1}{3}\right) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. Розв’язати систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^3 + y^3 + x^2 y + y^2 x = 15 \end{cases}$.

Задана система є симетричною, адже ліві частини обох рівнянь її є симетричними многочленами відносно двох змінних. Отже, їх можна подати через найпростіші симетричні многочлени відносно двох змінних: $x+y$ та xy. Здійснимо заміну: $x+y=u,$ $xy=v$. Враховуючи, що $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$ та $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=$ $=u\left(u^2-3v\right)=u^3-3uv$, система матиме вигляд: $\begin{cases}u^2-2v+u=8\\ u^3-3uv+uv=15\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}u^2-2v+u=8\\ u^3-2uv=15\end{cases}$. Виразимо з першого рівняння $2v$ через змінну u та підставимо

в друге рівняння системи. Отримане квадратне рівняння $u^2-8u+15=0$, згідно теореми Вієта, має корені: $u_1=5,$ $u_2=3.$ Тоді $v_1=11,$ $v_2=2$. Повернемось до змінних x та y. При цьому одна з систем не має розв’язків, а інша дає два: $(1;2),(2;1)$.

Відповідь: $(1;2),(2;1)$.

4. Розв’язати рівняння $x^4+x^3-72x^2+9x+81=0$.

Розділимо обидві частини рівняння на x ($x=0$ не є розв’язком рівняння).

$$x^2+x-72+\frac{9}{x}+\frac{81}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2+18+\frac{81}{x^2}\right)+\left(x+\frac{9}{x}\right)-72-18=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{9}{x}\right)^2+\left(x+\frac{9}{x}\right)-90=0.$$

Нехай $y=x+\frac{9}{x}$, тоді $\left(x+\frac{9}{x}\right)^2=y^2$. Одержимо рівняння: $y^2+y-90=0$. Використання заміни дозволяє понизити степінь рівняння та звести його до квадратного рівняння.

За теоремою Вієта корені рівняння: $y_1=-10,$ $y_2=9$. Отже, $x+\frac{9}{x}=-10$ чи $x+\frac{9}{x}=9$. Розв’язуючи ці рівняння, знаходимо корені: $x_1=-9,$ $x_2=-1,$ $x_3=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $-9, -1, \dfrac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

5. Знайти область визначення функції: $y = \sqrt{x+3} - \arccos\dfrac{x+3}{2} + (x+1)^0$.

Враховуючи області визначення окремих доданків, складемо систему: $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{x+3}{2} \le 1 \\ x+1 \ne 0 \end{cases}$. Далі: $\begin{cases} x \ge -3 \\ -5 \le x \le -1 \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ -5 \le x < -1 \end{cases}$.

Відповідь: $x \in [-3; -1)$.

6. Знайти найменший додатний період функції: $y = \sin 3x \cos 5x$.

Спочатку перетворимо добуток у суму та знайдемо період як найменше спільне кратне періодів окремих доданків. В необхідності цієї дії переконаємось на прикладі того, що найменше спільне кратне множників виразу $\sin x \cos x$ є 2π, а після перетворення виразу у $\dfrac{1}{2}\sin 2x$ бачимо, що найменшим періодом є π. Отже, $\sin 3x \cos 5x = \dfrac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$. Найменшим періодом T_1 функції $y = \sin 8x$ є $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, а для функції $y = \sin 2x$ найменший період $T_2 = \pi$. Тоді шуканий період $T = \text{НСК}(T_1; T_2) = \text{НСК}\left(\dfrac{\pi}{4}; \pi\right) = \pi$.

Відповідь: π.

7. Знайти область значень функції: $y = 5^{-x^2+2x-3}$.

Оцінимо спочатку область значень виразу, розміщеного в степені функції, а далі скористаємось властивістю монотонності показникової функції. $-x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 1) - 2 = -(x-1)^2 - 2 \le -2$, адже $-(x-1)^2 \le 0$. Таким чином степінь виразу набуває значення з проміжка $(-\infty; -2]$. Функція $y = 5^x$

при $x \to -\infty$ прямує до нуля, набуваючи додатних нескінченно малих значень. Тоді $0 < 5^{-x^2+2x-3} \le 5^{-2}$; тобто $y = 5^{-x^2+2x-3} \le \dfrac{1}{25}$ та $y > 0$.

Відповідь: $\left(0; \dfrac{1}{25}\right]$.

8. Розв'язати нерівність: $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

Потрібно розглянути окремо два випадки. Спочатку розв'яжемо нерівність при додатних значеннях підкореневого виразу. На $\sqrt{6+x-x^2}$ можна скоротити. $\begin{cases} 6+x-x^2>0 \\ \dfrac{1}{2x+5} \ge \dfrac{1}{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6<0 \\ \dfrac{x+4-(2x+5)}{(2x+5)(x+4)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<3 \\ \dfrac{-x-1}{(2x+5)(x+4)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2<x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ -2{,}5<x\le -1 \end{array}\right. \end{cases}$. А отже, остаточно: $x \in (-2; -1]$.

Якщо ж підкореневий вираз дорівнює нулю, то вся нерівність перетворюється в правильну числову нерівність за умови, що знаменники відмінні від нуля. Запишемо це у вигляді системи умов: $\begin{cases} 6+x-x^2=0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x+5\ne 0 \\ x+4\ne 0 \end{array}\right. \end{cases}$. Отже, до розв'язків першого випадку ще додалось два значення: $x=-2$ та $x=3$.

Відповідь: $x \in [-2; -1] \cup \{3\}$.

9. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$.

Область визначення рівняння – всі дійсні числа. Піднесемо обидві частини рівняння до кубу: $\left(\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12}\right)^3 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$5x+7-3\sqrt[3]{(5x+7)^2(5x-12)}+3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)^2}-(5x-12)=1 \quad \Leftrightarrow$$

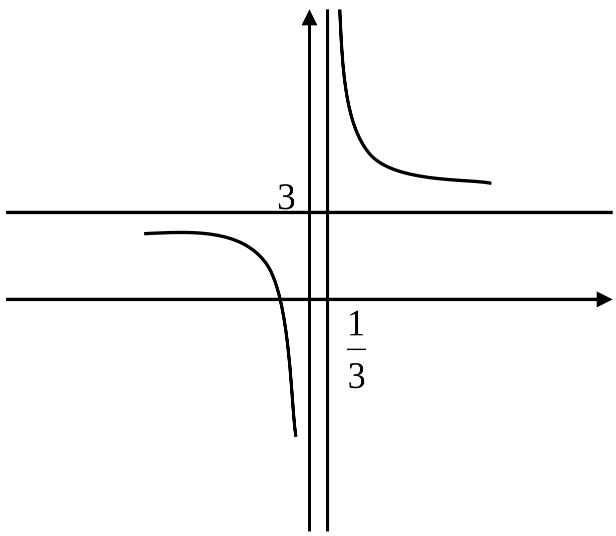
$$5x+7-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}\left(\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}\right)-(5x-12)=1.$$

Останні перетворення здійснені для того, щоб замінити різницю $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}$ на її значення (виходячи з початкового рівняння, цей вираз дорівнює 1). Отримуємо рівносильне рівняння: $5x+7-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}-(5x-12)=1.$ Ізолюємо кубічний корінь, що залишився, і піднесемо обидві частини рівняння до кубу: $-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=-18 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}=6 \;\Leftrightarrow\; (5x+7)(5x-12)=216$ $\Leftrightarrow\; 25x^2-25x=300 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Відповідь: 4; –3.

10. Побудувати графік функції: $y=\dfrac{9x+3}{3x-1}$.

Ця функція дробово-лінійна. Графіком є гіпербола. Можна виділити цілу частину і подати функцію у вигляді: $y=\dfrac{2}{x-\frac{1}{3}}+3.$ Тоді графік отримаємо з допомогою застосування ряду елементарних перетворень графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$. Якщо ж поставлено завдання побудувати графік схематично чи тільки визначити властивості функції з допомогою графічного зображення, то можна скористатись спрощеною схемою: визначити і нанести асимптоти, одну довільну точку графіка та нарисувати гіперболу.



11. При яких значеннях параметра a рівняння $\left|x^2+x+8\right|=4a-10$ має розв'язки ?

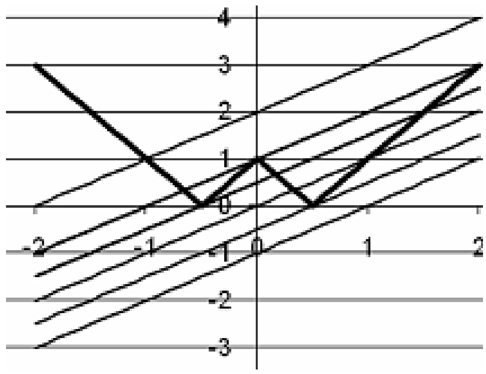
Очевидно, що $4a-10\geq 0$, адже ліва частина рівняння приймає лише невід'ємні значення. Але для більшої точності проаналізуємо значення, яких набуває функція $y=\left|x^2+x+8\right|$. Спочатку знайдемо вершину параболи $y=x^2+x+8$. Координати цієї точки: $\left(\frac{-1}{2};\frac{31}{4}\right)$. Вітки параболи напрямлені вгору, вона розміщена над віссю абсцис, тому знак модуля не впливає на неї. Таким чином, областю значень функції $y=\left|x^2+x+8\right|$ є проміжок $\left[\frac{31}{4};+\infty\right)$. Тому права частина рівняння теж має набувати цих значень.

$$4a-10\ge\frac{31}{4}\ \Leftrightarrow\ a\ge\frac{71}{16}.$$

Відповідь: $a\ge\frac{71}{16}$.

12. При яких значеннях параметра a рівняння $\left|\left|2x\right|-1\right|=x-a$ має рівно три розв'язки?

Побудуємо графіки функцій $y=\left|\left|2x\right|-1\right|$ та $y=x-a$. Перший графік не залежить від параметра, а другий в залежності від значень, яких набуває a рухається вздовж осі ординат. Рівно три точки перетину отримаємо у двох випадках: коли обидва графіки проходять через точку $(-0{,}5;0)$ або через точку $(0;1)$.



Якщо точка $(-0{,}5;0)$ належить $y=x-a$, то можна знайти значення параметра: $0=-0{,}5-a\ \Leftrightarrow\ a=-0{,}5$. Аналогічно з другого випадку знаходимо, що $a=-1$.

Відповідь: $-0{,}5;\ -1$.