МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

на правах рукопису

Оласюк Оксана Ігорівна

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ЦИФРОВИХ ОСВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Науковий керівник:
ХАРКЕВИЧ ЮРІЙ ІЛІОДОРОВИЧ
професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики, кандидат фіз.-мат. наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _________

Засідання кафедра теорії функцій та методики навчання математики

від ______________ 20 ___ р.

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С.Б. _________

Луцьк 2025

Зміст

ВСТУП

Сучасний етап розвитку суспільства характеризується інтенсивним упровадженням цифрових технологій у всі сфери людської діяльності, зокрема й освіту. Інформатизація та цифровізація освітнього простору зумовлюють необхідність оновлення підходів до навчання, переосмислення ролі вчителя й учня, а також упровадження нових форм і методів організації освітнього процесу. Цифрові технології поступово стають невід'ємною складовою освітнього середовища, забезпечуючи широкі можливості для підвищення ефективності та якості навчання, розширення доступу до інформації, розвитку самостійності та творчого потенціалу здобувачів освіти.

Реформування української освіти, яке реалізується в межах концепції «Нова українська школа», орієнтує педагогів на створення інноваційного, компетентнісно зорієнтованого освітнього середовища. Одним із ключових напрямів реалізації цієї концепції є впровадження цифрових освітніх технологій, які сприяють формуванню в учнів ключових компетентностей, насамперед інформаційно-цифрової, математичної та навчально-пізнавальної. Саме тому питання методичного забезпечення навчального процесу з урахуванням цифрових технологій набуває особливої актуальності.

Математика традиційно посідає провідне місце серед шкільних дисциплін, оскільки формує логічне, аналітичне й абстрактне мислення, розвиває вміння аргументувати, моделювати та робити обґрунтовані висновки. Проте сучасна практика навчання свідчить про те, що учні нерідко відчувають труднощі під час опанування окремих тем, особливо тих, які потребують високого рівня просторового й абстрактного мислення. Однією з таких тем є тригонометричні функції — один із найскладніших і водночас найважливіших розділів шкільного курсу алгебри та початків аналізу.

Однак практика показує, що традиційні методи навчання цієї теми часто не забезпечують глибокого розуміння сутності тригонометричних функцій, їхніх властивостей і взаємозв'язків. Учні здебільшого засвоюють матеріал механічно, без усвідомлення геометричного змісту понять, не завжди можуть застосувати знання на практиці або під час розв’язування прикладних задач. Це зумовлено недостатнім рівнем наочності, обмеженими можливостями для експериментування та відсутністю інтерактивної взаємодії з навчальним матеріалом.

Упровадження цифрових освітніх технологій створює нові умови для подолання цих труднощів. Використання динамічних математичних середовищ, таких як GeoGebra, Desmos, PhET Interactive Simulations, Mathway тощо, дозволяє вчителю моделювати процеси, будувати графіки функцій у реальному часі, змінювати параметри, досліджувати властивості та залежності, що робить навчання більш наочним, дослідницьким і цікавим для учнів.

Цифрові інструменти сприяють формуванню візуального мислення та інтерактивної взаємодії між учнем і навчальним матеріалом. Вони допомагають не лише спостерігати за змінами графіків, а й самостійно відкривати закономірності, перевіряти гіпотези, досліджувати зв’язки між аналітичним і геометричним поданням функцій. Таким чином, навчання набуває дослідницького, проблемно-пошукового характеру, що відповідає сучасним вимогам компетентнісного підходу.

Попри очевидні переваги, практика показує, що ефективність використання цифрових технологій у процесі вивчення тригонометричних функцій значною мірою залежить від методичного забезпечення цього процесу. Наявність великої кількості ресурсів не гарантує їх педагогічно доцільного застосування. Часто вчителі не мають достатнього досвіду інтеграції цифрових інструментів у структуру уроку, не володіють методикою їх використання відповідно до навчальних цілей. Саме тому актуальним стає питання розроблення цілісної методики навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій, що ґрунтується на сучасних психолого-педагогічних і дидактичних засадах.

Виходячи з цього, можна стверджувати, що проблема впровадження цифрових освітніх технологій у процес навчання тригонометричних функцій є надзвичайно актуальною як у теоретичному, так і в практичному аспектах. Вона передбачає не лише технічне застосування цифрових засобів, а й методичне обґрунтування їх ефективності, створення умов для оптимального поєднання традиційних та інноваційних підходів у навчанні математики.

Мета дослідження: Обґрунтувати та розробити методику навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій, спрямовану на підвищення ефективності засвоєння знань і формування пізнавальної активності учнів.

Предмет дослідження: Методика навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій.

Об’єкт дослідження: Процес навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Практичне значення дослідження роботи полягає в тому, що розроблені методичні матеріали можуть бути використані вчителями математики під час вивчення тригонометричних функцій у школі, а також у процесі підготовки майбутніх учителів математики.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати психолого-педагогічні та методичні засади вивчення тригонометричних функцій у шкільному курсі математики.

2. Розкрити сутність і можливості використання цифрових освітніх технологій у навчанні математики.

3. Визначити педагогічні умови ефективного використання цифрових технологій у процесі вивчення тригонометричних функцій.

4. Розробити методику навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій.

Наукова новизна дослідження: уточнено методичні засади навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій; визначено педагогічні умови, які забезпечують підвищення ефективності формування знань учнів; розроблено та апробовано методику навчання з використанням цифрових засобів (GeoGebra, Desmos, PhET тощо).

Апробація результатів. Основні положення та результати дослідження були представленні на XX Міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука 17 – 22 листопада 2025 р. [198, 252 с.], Всеукраїнській інтернет-конференції «Методологічні та математичні аспекти навчання в освітньому процесі НУШ» 15 червня 2023р. [141, 322 с.], XVI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Молода науко Волині: пріоритети та перспективи дослідження» 17 травня 2022 [467, 1063 с.]

Структура роботи: Робота складається із вступу, трьох розділів, загальних висновків та списку використаних джерел із 26 найменувань. Повний обсяг роботи становить 80 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КОНТЕКСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

1.1. Значення та особливості вивчення тригонометричних функцій у шкільному курсі математики

Розділ «Тригонометричні функції» займає одне з провідних місць у шкільному курсі математики, оскільки поєднує знання з геометрії, алгебри та початків аналізу, формуючи в учнів цілісне уявлення про взаємозв'язки між різними розділами математики. Тригонометрія є важливою складовою математичної освіти, адже вона не лише розкриває властивості трикутників і кола, але й створює основу для опису та моделювання періодичних процесів, які мають широке застосування у фізиці, техніці, архітектурі, інформатиці та інших галузях знань.

У шкільному курсі тригонометричні функції традиційно вивчаються в 10 класі під час опанування теми «Тригонометричні функції кута та їх властивості». На цьому етапі учні вже мають певний рівень абстрактного мислення, володіють основними алгебраїчними та геометричними знаннями, що дає можливість перейти до вивчення функціональних залежностей нового типу. Вивчення тригонометричних функцій забезпечує реалізацію міжпредметних зв'язків, оскільки ці знання необхідні для подальшого вивчення похідної, інтеграла, коливальних і хвильових процесів, гармонічних рухів тощо.

Тригонометричні функції відіграють значну роль у розвитку логічного, просторового та алгоритмічного мислення учнів. Вони дають змогу формувати вміння узагальнювати, робити висновки на основі графічного й аналітичного аналізу, розвивати здатність до моделювання реальних процесів. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей учні навчаються бачити закономірності, досліджувати властивості функцій, аналізувати їх періодичність і симетрію, що є важливим етапом у формуванні математичної компетентності [1].

Окрім освітнього значення, вивчення тригонометричних функцій має велике розвивальне й практичне значення. Знання тригонометрії застосовуються у фізиці (опис коливань, хвиль, електричних процесів), у географії (визначення координат і відстаней), у будівництві, астрономії, навігації, комп'ютерній графіці тощо. Тому опанування цієї теми не лише розширює світогляд учнів, а й демонструє практичну цінність математичних знань у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності [4].

Разом із тим, тригонометричні функції належать до тих тем шкільної математики, які традиційно викликають труднощі в учнів. Це зумовлено кількома чинниками.

По-перше, тригонометричні поняття мають високий рівень абстракції: учням потрібно одночасно оперувати як числовими, так і геометричними уявленнями, розуміти співвідношення між кутами, радіанами, координатами на колі.

По-друге, для успішного засвоєння необхідно добре володіти основними знаннями з геометрії (поняття кола, кута, синуса, косинуса гострого кута в прямокутному трикутнику) та алгебри (поняття функції, рівняння, графіка). Недостатня опора на попередні знання часто призводить до поверхового сприйняття нового матеріалу.

По-третє, значна кількість формул, тотожностей та властивостей потребує системного підходу до запам'ятовування і застосування, чого учні не завжди можуть досягти без належної візуалізації та практичної спрямованості навчання [10].

Аналіз педагогічного досвіду свідчить, що учні часто сприймають тригонометричні функції формально, механічно запам'ятовуючи співвідношення й не усвідомлюючи їхнього змісту. Типовими є труднощі під час побудови графіків, визначення знаків функцій у різних чвертях, розв'язування тригонометричних рівнянь і перетворень виразів. Відсутність наочності та зв'язку з реальними ситуаціями призводить до втрати інтересу до вивчення теми.

Складність засвоєння цієї теми обумовлює необхідність удосконалення методики її викладання. Одним із найперспективніших напрямів сучасної методики є використання цифрових освітніх технологій, які створюють умови для візуалізації, інтерактивності та індивідуалізації навчання. Цифрові інструменти дозволяють учням бачити, як змінюється графік функції при зміні її параметрів, експериментувати з формулами, проводити моделювання, що сприяє глибшому розумінню сутності математичних залежностей [6].

У сучасних дослідженнях питання методики навчання тригонометричних функцій розглядалися в працях таких учених і педагогів, як А. Г. Мерзляк, Г. П. Бевз, О. С. Істер, І. І. Тарасенкова, Н. А. Тарасенкова, В. М. Кузнецова, С. О. Скворцова та ін. Автори відзначають важливість поетапного формування понять, системного використання наочності, опори на практичні задачі та розвиток функціонального мислення. Однак аналіз літератури свідчить, що проблема інтеграції цифрових освітніх технологій у процес навчання тригонометрії ще недостатньо висвітлена. Потребує подальшого дослідження питання ефективного поєднання традиційних та інноваційних методів навчання, вибору оптимальних цифрових інструментів і визначення педагогічних умов їх результативного використання.

Таким чином, вивчення тригонометричних функцій має важливе значення для формування математичної компетентності учнів, розвитку їхнього логічного та просторового мислення, здатності застосовувати знання у практичних ситуаціях. Водночас складність змісту цієї теми вимагає оновлення методичних підходів до її викладання. Застосування цифрових освітніх технологій відкриває нові можливості для підвищення мотивації учнів, забезпечення наочності та індивідуалізації навчання. Саме ці аспекти зумовлюють актуальність подальшого дослідження методики навчання тригонометричних функцій із використанням сучасних цифрових інструментів, що стане предметом аналізу в наступних підпунктах роботи.

1.2. Психолого-педагогічні та методичні засади формування понять тригонометрії

Вивчення тригонометричних функцій у школі передбачає не лише засвоєння системи знань і формул, а й формування у школярів глибокого розуміння сутності тригонометричних залежностей, уміння застосовувати їх для опису реальних явищ і процесів. Для досягнення цих результатів важливо спиратися на психолого-педагогічні закономірності пізнавальної діяльності учнів та методичні принципи навчання математики.

Згідно з концепцією компетентнісного навчання, метою математичної освіти є не просто засвоєння знань, а формування ключових і предметних компетентностей, розвиток критичного мислення, дослідницьких і творчих здібностей. Вивчення тригонометричних функцій має значний потенціал для реалізації цих завдань, адже потребує активної розумової діяльності, аналітичного мислення та вміння узагальнювати [5].

З позицій психології навчання, процес засвоєння абстрактних понять, до яких належать тригонометричні функції, потребує опори на наочність і поступовий перехід від конкретного до абстрактного. За Л. Виготським, засвоєння понять відбувається ефективніше, коли учень спочатку діє з предметами або їх зоровими моделями, а потім переходить до оперування символами та формулами. Тому у процесі формування понять тригонометрії важливо використовувати графічні моделі, коло одиничного радіуса, динамічні зображення, що допомагають пов’язати геометричний і функціональний зміст тригонометричних співвідношень.

Психологічні дослідження (П. Гальперін, В. Давидов, Н. Менчинська) доводять, що ефективне формування математичних понять відбувається за умови дотримання певної послідовності:

1. створення проблемної ситуації;
2. аналіз і виділення суттєвих ознак поняття;

3. побудова узагальнення;
4. закріплення через різні види діяльності;
5. застосування в нових ситуаціях [23].

У контексті тригонометрії це означає, що учні повинні самостійно відкривати закономірності, аналізувати залежності між кутом і значеннями функцій, робити висновки на основі дослідження графіків. Такий підхід формує не лише знання, а й уміння мислити математично.

Методика навчання тригонометричних функцій повинна ґрунтуватися на провідних дидактичних принципах: науковості, доступності, систематичності, наочності, зв'язку теорії з практикою, активності та самостійності учнів.

- Принцип науковості забезпечує правильне розуміння математичних термінів і зв'язків між ними. Учитель має вводити тригонометричні функції як частину загальної системи математичних знань, підкреслюючи їх логічну послідовність і значення.
- Принцип доступності вимагає добору таких методів і засобів навчання, які відповідають віковим особливостям учнів старшої школи. Надмірна формалізація матеріалу без ілюстрацій і практичних прикладів призводить до втрати мотивації.
- Принцип наочності має особливе значення у вивченні тригонометрії, адже саме через зорове сприйняття формується уявлення про періодичність, симетрію та взаємозв'язок функцій.
- Принцип системності вимагає розглядати тригонометричні функції як частину цілісної системи, що поєднує різні розділи математики [28].

У психолого-педагогічному аспекті важливу роль відіграє мотивація навчання. Досвід показує, що зацікавленість учнів значно зростає, коли вони бачать практичне застосування знань. Використання прикладів із фізики, техніки, а також цифрових моделей допомагає продемонструвати, як тригонометричні функції описують рух маятника, звукові хвилі, електричні коливання. Такий підхід підвищує мотивацію, сприяє розвитку пізнавальної активності та позитивного ставлення до математики [24].

У методичній літературі наголошується, що вивчення тригонометрії має спиратися на індуктивно-дедуктивний підхід. На початковому етапі доцільно застосовувати індуктивний метод — учні спостерігають, порівнюють, роблять висновки. Надалі, коли формується система понять, використовується дедуктивний метод — від загального до конкретного, від властивостей функцій до розв'язування задач. Важливо забезпечити взаємозв'язок між цими етапами, щоб навчальний процес був цілісним і логічно послідовним.

Особливу роль відіграє використання проблемного навчання, яке активізує пізнавальну діяльність учнів. Наприклад, під час введення поняття синуса й косинуса можна створити ситуацію, коли учні самостійно відкривають закономірність залежності координат точки на колі від кута повороту. Це спонукає їх до дослідження, формує логічне мислення та вміння робити висновки.

Сучасна методика рекомендує широко використовувати візуалізацію та інтерактивні технології. Психолого-педагогічні дослідження доводять, що динамічна візуалізація сприяє глибшому засвоєнню складних понять. Саме тому цифрові освітні інструменти, зокрема GeoGebra, Desmos, PhET, є надзвичайно ефективними у формуванні понять тригонометрії. Вони дозволяють учням експериментувати: змінювати значення кутів, спостерігати за зміною координат точки, бачити, як це впливає на графік функції. Така інтерактивність забезпечує зв'язок між дією, зоровим образом і аналітичним записом, що відповідає психологічним закономірностям навчання [26].

Згідно з теорією поетапного формування розумових дій (П. Гальперін), важливо створити поетапну структуру засвоєння понять тригонометрії:

1. Орієнтовно-мотиваційний етап — постановка проблеми, актуалізація попередніх знань, створення пізнавального інтересу.

2. Операційно-діяльнісний етап — виконання практичних дій із моделями (наприклад, побудова кола в GeoGebra, вимірювання кутів, спостереження змін координат).

3. Узагальнювально-аналітичний етап — формулювання властивостей функцій, запис рівнянь, побудова графіків.

4. Контрольно-рефлексивний етап — застосування знань у нових ситуаціях, розв'язування задач, самооцінювання результатів [22].

Такий підхід забезпечує глибше усвідомлення матеріалу, адже учень не просто запам'ятовує формули, а самостійно «відкриває» закономірності через практичну діяльність.

Варто враховувати також вікові психологічні особливості старшокласників. У цьому віці активно розвивається логічне й абстрактне мислення, проте увага ще нестійка, тому необхідно чергувати види діяльності, включати елементи дослідження, дискусії, експериментів. Цифрові технології дозволяють урізноманітнити навчальний процес, забезпечити диференціацію та індивідуалізацію навчання, що особливо важливо при роботі з учнями з різними рівнями підготовки.

Методичні засади вивчення тригонометрії передбачають використання різних форм організації навчання: фронтальної, групової, індивідуальної, проєктної діяльності. Доцільно поєднувати традиційні методи (пояснення, демонстрація, розв'язування задач) з інтерактивними (робота в середовищі GeoGebra, виконання мінідосліджень, створення цифрових презентацій, побудова графіків у Desmos). Така інтеграція формує в учнів уміння застосовувати математичні знання в цифровому середовищі, розвиває цифрову грамотність і самостійність [7].

Отже, психолого-педагогічні та методичні засади навчання тригонометричних функцій полягають у поєднанні наукового змісту з психологічними закономірностями засвоєння знань і сучасними підходами до організації навчальної діяльності. Вони передбачають системний, діяльнісний, компетентнісний і особистісно орієнтований підхід до навчання, який забезпечує розвиток пізнавальної активності та формування стійких знань. Застосування цифрових технологій виступає ефективним інструментом реалізації цих засад, адже воно відповідає природі мислення сучасного учня, підсилює мотивацію до навчання й забезпечує глибше розуміння тригонометричних понять.

1.3. Можливості цифрових освітніх технологій у навчанні математики

У сучасній школі цифрові технології стають невід’ємною частиною освітнього процесу. Їх використання змінює не лише способи подачі навчального матеріалу, а й саму роль учня та вчителя. Якщо раніше головним джерелом знань був підручник і пояснення вчителя, то сьогодні учень може активно досліджувати матеріал за допомогою цифрових інструментів, самостійно робити висновки, перевіряти результати та спостерігати закономірності у зручній, наочній формі.

Особливо важливе значення цифрові технології мають під час вивчення тригонометричних функцій, адже цей розділ часто викликає труднощі через абстрактність понять. Учням нелегко уявити, як змінюється значення синуса чи косинуса в залежності від кута, як виглядають їхні графіки, чому вони мають певний період чи амплітуду. Саме тут цифрові засоби стають незамінними помічниками, адже дають можливість побачити, змінити й дослідити кожен параметр функції у динаміці [20].

Цифрові освітні технології — це різноманітні програми, онлайн-сервіси, мобільні додатки, платформи для візуалізації, тестування, створення інтерактивних завдань тощо. Їх головна перевага полягає у тому, що вони зробляють навчання більш цікавим, доступним та активним. Учні не просто сприймають готову інформацію, а стають дослідниками, які експериментують із математичними об’єктами.

Використання таких засобів сприяє:

- підвищенню мотивації до вивчення математики через елементи гри, інтерактивності й змагальності;
- візуалізації абстрактних понять, що полегшує їхнє розуміння;

- розвитку логічного, алгоритмічного та критичного мислення;
- формуванню самостійності і відповідальності за результат навчання.

Цифрові технології створюють умови для індивідуалізації навчання, коли кожен учень може працювати у власному темпі, повторювати складні моменти або виконувати додаткові завдання.

Приклади ефективного використання цифрових інструментів у вивченні тригонометричних функцій::

1. GeoGebra — інтерактивне математичне середовище, яке дозволяє будувати графіки тригонометричних функцій, змінювати параметри (амплітуду, період, фазовий зсув) і відразу бачити, як це впливає на форму графіка.

Наприклад, під час вивчення теми «Графік функції $y = sin\,x$» учитель може створити динамічну модель, де учень рухає повзунок — і бачить, як змінюється графік. Це формує розуміння залежності між аналітичним виразом та його візуальним образом.

2. Desmos — онлайн-графічний калькулятор, який легко використовувати навіть на смартфоні. Учні можуть одночасно будувати кілька функцій і порівнювати їх: наприклад, $y = sin\,x, y = cos\,x, y = sin(2x), y = 2sin(x)$. Це дозволяє спостерігати закономірності, робити висновки самостійно.

3. PhET Interactive Simulations — допомагає поєднати математику з фізикою. Наприклад, симуляція гармонічних коливань показує, що зміна кута пов’язана з рухом по колу, а графік коливань відповідає синусоїді. Так учні бачать реальний зміст тригонометричних функцій.

4. LearningApps, Quizizz, Kahoot — платформи для створення інтерактивних завдань і тестів. Учитель може підготувати вправи на обчислення значень тригонометричних функцій або визначення властивостей функцій у формі гри, що значно підвищує зацікавленість учнів.

5. Google Classroom або Microsoft Teams — допомагають організувати дистанційну або змішану форму навчання. Учитель може розміщувати відео з

поясненнями, презентації, домашні завдання, а також перевіряти результати роботи учнів онлайн [17].

Використання цифрових інструментів під час навчання тригонометричних функцій має такі переваги:

- покращення розуміння матеріалу завдяки наочності й динамічним візуалізаціям;
- підвищення інтересу до навчання через використання сучасних технологій;
- розвиток пізнавальної активності, коли учень самостійно шукає відповіді та перевіряє результати;
- інтерактивність і миттєвий зворотний зв'язок — учень відразу бачить помилку та може її виправити;
- створення умов для групової роботи, коли учні обговорюють результати, обмінюються думками й висновками.

Цифрові технології також сприяють формуванню інформаційної грамотності — учні вчаться шукати, перевіряти й аналізувати дані, використовувати їх для розв'язання практичних задач.

Водночас, слід враховувати, що не всі школи мають належну технічну базу. Деякі учні можуть не мати стабільного доступу до Інтернету чи власних пристроїв. Також важливим є рівень підготовки самого вчителя: необхідно не лише знати програми, а й розуміти, як саме інтегрувати їх у навчальний процес, щоб вони не відволікали від суті, а навпаки — допомагали зрозуміти матеріал.

Ефективність використання цифрових освітніх технологій залежить від того, наскільки вони педагогічно обґрунтовані. Тобто вчитель має чітко розуміти, яку мету він переслідує, використовуючи той чи інший інструмент: чи це візуалізація нового матеріалу, закріплення, контроль знань чи мотиваційна діяльність [16].

Отже, цифрові освітні технології відкривають широкі можливості для підвищення ефективності навчання математики. Вони допомагають учням краще розуміти абстрактні поняття, формують дослідницькі навички, сприяють розвитку критичного мислення та самостійності. У процесі вивчення тригонометричних функцій цифрові інструменти дозволяють поєднати аналітичний і візуальний підходи, зробити навчання більш цікавим, динамічним і результативним.

Таким чином, аналіз значення та особливостей вивчення тригонометричних функцій (1.1), психолого-педагогічних засад їх формування (1.2) та можливостей цифрових освітніх технологій (1.3) дозволяє зробити кілька ключових висновків.

По-перше, тригонометрія є фундаментальною дисципліною, що не лише забезпечує математичну підготовку учнів, а й розвиває логічне, аналітичне та просторове мислення, а також уміння аналізувати взаємозв'язки між абстрактними поняттями і реальними об'єктами.

По-друге, ефективне засвоєння понять тригонометрії потребує поетапного та активного навчання, де учні поєднують спостереження, дослідження, математичне моделювання та практичні вправи. Наприклад, учні можуть досліджувати залежності між кутами і сторонами трикутника, знаходити значення функцій для різних кутів або експериментально змінювати параметри графіків функцій.

По-третє, використання цифрових освітніх технологій значно підвищує наочність і доступність матеріалу. Інтерактивні вправи з GeoGebra або Desmos дозволяють будувати графіки функцій, змінювати амплітуду, період та фазовий зсув, а онлайн-тести та вікторини на платформах LearningApps або Quizizz стимулюють самостійну роботу та закріплення знань. Такі вправи сприяють розвитку інформаційної та математичної компетентностей, формують навички дослідження та критичного мислення, а також підвищують мотивацію до навчання [14].

Отже, врахування всіх цих аспектів забезпечує цілісне поєднання теоретичних знань, практичних умінь і сучасних методичних інструментів. Поєднання традиційних методів навчання з цифровими технологіями робить процес засвоєння тригонометричних функцій більш ефективним, цікавим і результативним, готуючи учнів до застосування знань у навчанні, практичній діяльності та повсякденному житті.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ЦИФРОВИХ ОСВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ

2.1. Загальна характеристика та принципи побудови методики

Методика навчання є однією з ключових категорій педагогічної науки. Вона визначає систему організації освітнього процесу, способи та засоби, завдяки яким учні засвоюють знання, набувають практичних умінь та формують компетентності. У контексті навчання тригонометричних функцій методика поєднує теоретичну основу, психологічні аспекти та сучасні технологічні засоби, забезпечуючи ефективність засвоєння матеріалу.

Методика навчання математики є складною, багатокомпонентною системою, яка включає такі взаємопов'язані елементи:

1. Цільова орієнтація

Метою навчання тригонометрії є не лише формування знань про тригонометричні функції (синус, косинус, тангенс, котангенс), їхні властивості та графіки, але й розвиток логічного, аналітичного та просторового мислення учнів. Крім того, важливо формувати здатність застосовувати отримані знання у практичних задачах — геометричних, фізичних, інженерних або прикладних.

2. Змістова структура

Методика передбачає послідовне й логічне викладання матеріалу, що дозволяє учням освоювати знання поступово: від базових понять (кут, співвідношення сторін у трикутнику) до абстрактних визначень і графіків тригонометричних функцій. Така структура забезпечує глибоке розуміння матеріалу та мінімізує труднощі у його засвоєнні.

3. Методичні засоби та прийоми

До них належать традиційні способи навчання (пояснення, демонстрації, практичні вправи) та сучасні інтерактивні методи: цифрові моделі, інтерактивні вправи, динамічні графіки функцій. Важливо, що методика є гнучкою —

учитель адаптує її під конкретні умови класу, рівень підготовки учнів і наявність технічних засобів.

Методика навчання тригонометрії будується на основі поєднання теоретичних знань, педагогічних принципів та сучасних технологій. Вона визначає, як учитель організовує навчальний процес, якими способами досягається засвоєння знань і формування компетентностей учнів, а також які засоби використовуються для контролю та самостійної роботи.

Ключовим аспектом побудови методики є послідовність і системність навчання: матеріал подається так, щоб учні поступово переходили від конкретних, наочних прикладів до абстрактних понять і графіків функцій, а потім — до практичного застосування знань у розв’язанні задач і моделюванні процесів. Такий підхід дозволяє не лише зрозуміти, як будуються тригонометричні функції, але й розвивати логічне мислення, просторову уяву та аналітичні навички [25].

Важливим елементом методики є роль учня і вчителя. Вчитель виступає організатором і наставником: пояснює основні поняття, демонструє способи побудови графіків і розв’язання задач, стимулює дослідницьку активність. Учень, у свою чергу, активно досліджує, моделює, аналізує та робить висновки. Використання цифрових технологій значно полегшує цей процес: інтерактивні графіки, візуалізації та онлайн-платформи допомагають учням побачити закономірності і відразу перевірити результати.

Методика передбачає також гнучкість та адаптивність. Вона дозволяє змінювати форми роботи (фронтальна, групова, індивідуальна), підбирати завдання відповідно до рівня підготовки учнів та використовувати різні цифрові засоби: GeoGebra, Desmos, LearningApps тощо. Це забезпечує динамічність уроку, активність учнів і ефективне засвоєння матеріалу [21].

Таким чином, замість формального перерахування принципів, методика розкривається через логіку організації навчання, взаємодію учителя і учнів, поєднання традиційних і цифрових засобів та диференційоване застосування матеріалу. Це дозволяє побудувати урок, який відповідає сучасним вимогам освіти, забезпечує глибоке засвоєння тригонометричних понять і формує практичні та аналітичні навички учнів.

2.2. Форми та методи роботи з використанням цифрових технологій

Вивчення тригонометричних функцій у сучасній школі потребує поєднання традиційних методів навчання з цифровими інструментами, що дозволяє підвищити активність учнів і сприяє глибокому засвоєнню матеріалу. Сучасні платформи та цифрові інструменти не лише роблять навчання наочнішим, а й дають змогу організовувати дослідницьку діяльність, практичні експерименти та проектні завдання, що розвивають аналітичне і критичне мислення учнів.

Цифрові технології інтегруються через три основні форми роботи: інтерактивні уроки, практичні роботи та дослідницькі проекти, які взаємодоповнюють одна одну і забезпечують послідовне навчання: від ознайомлення з новими поняттями до їх практичного застосування та дослідження.

1. Інтерактивні уроки

Інтерактивний урок у цифровому середовищі дозволяє перетворити навчання на активне дослідження закономірностей функцій, а не лише на демонстрацію матеріалу.

Учні працюють із динамічними графіками та цифровими моделями, що дозволяє відразу спостерігати наслідки зміни параметрів функцій. Наприклад, при зміні амплітуди, періоду або фазового зсуву синусоїди можна одразу побачити вплив на форму графіка, сформулювати власні висновки і порівняти результати з теоретичними очікуваннями.

Приклад завдання:

Побудувати графік $y = A \cdot sin(Bx + C)$ у GeoGebra і змінювати значення параметрів A, B, C відстежуючи, як змінюється графік, та оформити короткий звіт із висновками.

Використання інтерактивних вправ у Kahoot, LearningApps або Padlet дозволяє поєднати дослідження і колективне обговорення, стимулюючи мотивацію учнів і розвиток навичок аргументації та критичного мислення [18].

2. Практичні роботи

Цифрові практичні роботи дають змогу закріпити теоретичні знання через практичні експерименти та моделювання**.** Учні можуть проводити дослідження змін графіків тригонометричних функцій, порівнювати результати і робити висновки, що формує аналітичне мислення та навички системного дослідження**.**

Приклад практичної роботи:

Побудувати графіки $y = 2\,sin(3x + \frac{\pi}{4})$ та $y = cos(2x - \frac{\pi}{6})$, дослідити зміни амплітуди і періоду, скласти порівняльну таблицю і зробити висновки.

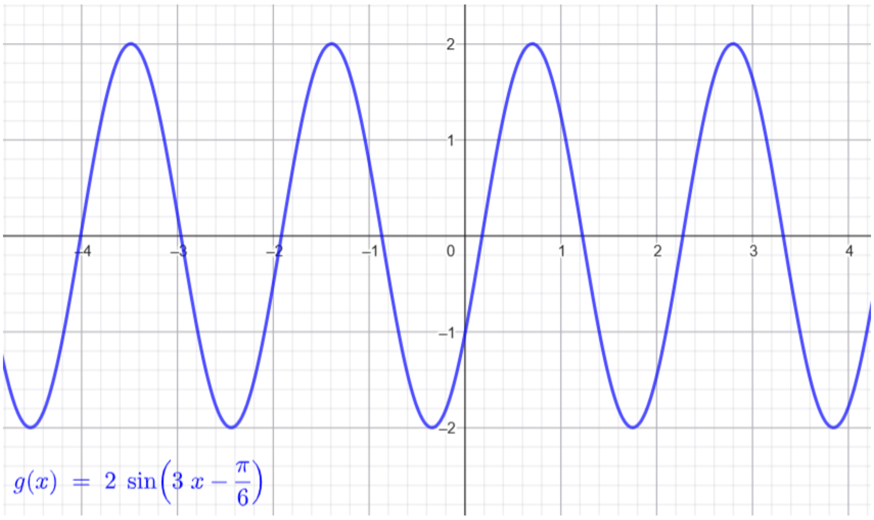

Рис. 1

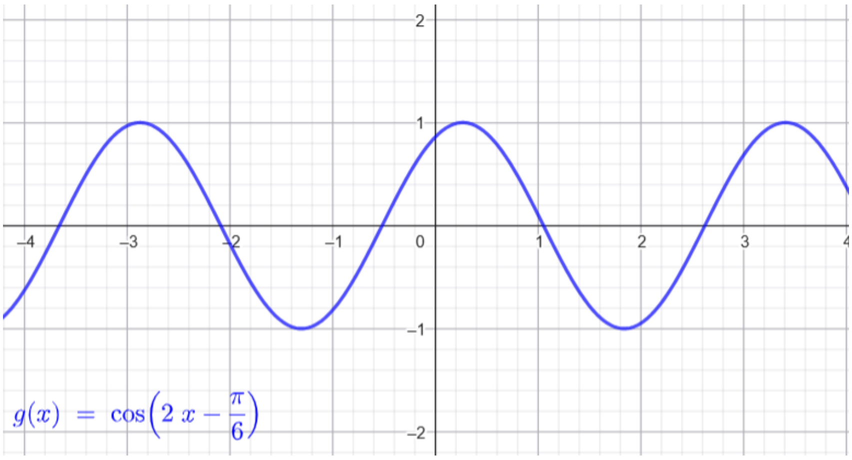

Рис. 2

Такий підхід дозволяє здійснювати віртуальні експерименти, змінювати параметри моделей і миттєво аналізувати результати, що формує у учнів навички самостійного дослідження та контролю результатів [15].

3. **Дослідницькі проекти**

Дослідницькі проекти на основі цифрових технологій дозволяють застосувати знання тригонометрії у практичних і реальних ситуаціях**.** Учні самостійно обирають тему дослідження, наприклад, моделювання коливань маятника, звукових хвиль або сезонних процесів.

Етапи виконання проекту:

1) Формування моделі процесу з використанням функцій у цифровому середовищі (GeoGebra, Desmos).
2) Дослідження впливу параметрів функції на модель і отримання результатів.
3) Порівняння отриманих результатів із реальними даними та оформлення висновків.
4) Презентація результатів у вигляді цифрової презентації або інтерактивної дошки.

Такий підхід розвиває проектні та дослідницькі компетентності, вчить застосовувати знання в практичних завданнях і стимулює творчий підхід до навчання.

4. Логіка поєднання форм і методів

Ефективне використання цифрових технологій передбачає послідовне поєднання інтерактивного уроку, практичної роботи і дослідницького проекту:

- Інтерактивний урок — ознайомлення з матеріалом та первинне дослідження закономірностей.
- Практична робота — поглиблення знань через експерименти та моделювання.
- Дослідницький проект — застосування знань у комплексних завданнях та формування компетентностей.

Таке поєднання дозволяє забезпечити глибоке засвоєння матеріалу, розвиток критичного та аналітичного мислення, цифрових компетентностей і самостійності учнів, а також стимулює їхню активну пізнавальну діяльність.

2.3. Розробка уроків та навчальних завдань із застосуванням цифрових інструментів (приклади уроків, інтерактивні вправи, завдання для самостійної роботи)

Сучасний урок тригонометрії передбачає не лише опанування математичних понять, а й розвиток умінь аналізувати, досліджувати, моделювати й застосовувати набуті знання в реальних та навчальних ситуаціях. Використання цифрових освітніх технологій у процесі вивчення тригонометричних функцій сприяє формуванню ключових і предметних компетентностей учнів, розвиває критичне мислення, просторову уяву та здатність до самостійного пізнання.

Методика створення таких уроків базується на інтеграції ІКТ у всі етапи навчального процесу: від мотивації до рефлексії. Основними цифровими інструментами, що доцільно застосовувати на уроках тригонометрії, є GeoGebra, Desmos, LearningApps, Wordwall, Classtime, На Урок, Google Classroom, Jamboard, Padlet, Canva тощо.

1. Підготовчий етап. Учитель визначає освітню мету, очікувані результати навчання та добирає цифрові інструменти, які підсилюють розуміння теми. Наприклад, для візуалізації графіків тригонометричних функцій доцільно використати GeoGebra або Desmos, а для закріплення понять — Wordwall чи Classtime.

На цьому етапі також важливо спланувати форму взаємодії: фронтальну (спільна робота на інтерактивній дошці), групову (робота з цифровими моделями в парах) або індивідуальну (виконання онлайн-завдань) [13].

2. Мотиваційно-організаційний етап. Метою є створення позитивного емоційного фону та зацікавлення учнів темою. Для цього можна використати інтерактивну вікторину у сервісі Wordwall або На Урок, де учні, наприклад, повинні встановити відповідність між реальними прикладами коливальних процесів і тригонометричними моделями, що їх описують.

Такий прийом допомагає усвідомити практичну значущість тригонометрії (рух маятника, зміна добової температури, електричні коливання тощо).

3. Етап актуалізації опорних знань. На цьому етапі учні пригадують основні властивості кутів, одиниці вимірювання (градуси, радіани), поняття синуса, косинуса, тангенса та котангенса гострого кута.

Для цього можна застосувати LearningApps — вправу типу “Встанови відповідність”, де потрібно співставити кут і його значення тригонометричних функцій, або Classtime — для короткого повторення у форматі тестування.

Такі інструменти дозволяють учителю оперативно побачити рівень підготовки класу й визначити, на які моменти варто звернути додаткову увагу [2].

4. Етап вивчення нового матеріалу. Тут відбувається основна інтеграція цифрових технологій. Під час пояснення понять тригонометричних функцій довільного кута, графіків функцій або перетворень графіків ефективним є використання GeoGebra.

Учитель може продемонструвати, як змінюється графік функції при зміні коефіцієнтів $y = asin(bx + c) + d$, показати поняття періоду, амплітуди, фази зсуву.

Такі інтерактивні візуалізації дозволяють учням самостійно “дослідити” функцію — змінюючи параметри за допомогою повзунків, спостерігаючи вплив кожного з них на вигляд графіка.

Для пояснення зв’язків між функціями (наприклад, $sin^2 x + cos^2 x = 1$) можна скористатися Jamboard — інтерактивною дошкою, де учні самостійно створюють схеми або заповнюють пропуски у формулах.

5. Етап закріплення матеріалу. Закріплення знань можна здійснювати через інтерактивні завдання у Wordwall або Classtime.

Наприклад:

- у Classtime — тест на визначення значень тригонометричних функцій при заданих кутах.
- у Wordwall створити вправу “Відповідність між графіком і формулою функції”.

Для самостійної роботи учнів доцільно використовувати Google Classroom, де розміщуються відеопояснення, тренувальні вправи, посилання на симуляції в GeoGebra.

6. Етап контролю та рефлексії. Для перевірки рівня засвоєння знань можна застосовувати тестування у “На Урок” або Google Forms, де учні отримують миттєвий результат. Для рефлексії можна організувати “хмару слів” у Padlet або Mentimeter, де кожен пише одне слово, що характеризує його розуміння теми. Такий підхід формує в учнів навички самооцінювання і критичного мислення. Методично продумана структура уроку тригонометрії з цифровими елементами забезпечує не лише глибоке розуміння теоретичного матеріалу, а й розвиток інформаційно-цифрової компетентності, що є вимогою сучасної освіти [19].

Інтерактивні вправи в процесі навчання тригонометричних функцій виступають як засіб активізації пізнавальної діяльності, візуалізації складних абстрактних понять і забезпечення зворотного зв’язку. Наведемо приклади найбільш ефективних цифрових завдань, апробованих у навчальному процесі.

Приклад 1. Інтерактивна модель “Графік синуса і косинуса”

Учитель демонструє на інтерактивній дошці зміну графіка функції $y = asin(bx + c) + d$ при зміні коефіцієнтів a, b, c, d [8].

Наприклад: Будуємо графік функції

$$y = 8\,sin(4\,x - 3) + 6 \text{ та } y = 8\,cos(4\,x - 3) + 6$$

за допомогою GeoGebra та порівнюємо їх.

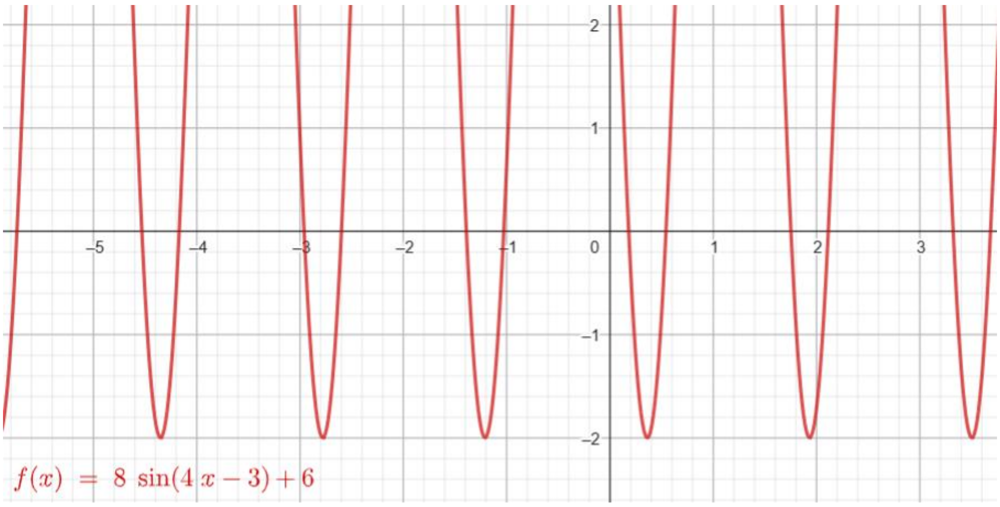

Рис. 3

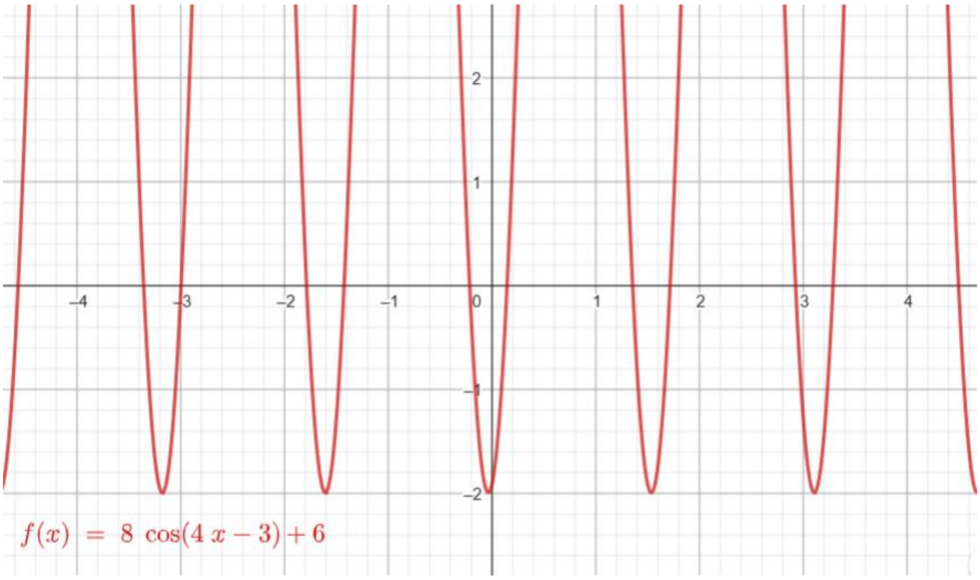

Рис. 4

Учні працюють у власних облікових записах GeoGebra, змінюючи параметри функції і спостерігають, як кожен коефіцієнт впливає на форму та положення графіка. Такий підхід сприяє розвитку дослідницького мислення, умінню аналізувати залежності та робити власні висновки.

Приклад 2. Вправа “Визнач кут за значенням функції” (LearningApps)

Створюється інтерактивна гра, де потрібно обрати правильне значення кута за поданим значенням синуса або косинуса. Це дозволяє в ігровій формі повторити табличні значення тригонометричних функцій і тренувати швидкість мислення.

Приклад 3. Завдання “Знайди помилку” (Classtime або На Урок)

Учням пропонується кілька варіантів записів тригонометричних тотожностей, серед яких є помилки. Завдання полягає в тому, щоб знайти й виправити їх, пояснивши свій вибір. Такий тип вправ розвиває увагу до математичних символів і розуміння тотожностей.

Приклад 4. Інтерактивна вправа “Порівняй графіки” (Wordwall)

У вправі потрібно співставити графіки тригонометричних функцій із їхніми формулами. Це дозволяє закріпити знання про відмінності між синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом.

Приклад 5. Груповий проєкт “Тригонометрія в навколишньому світі” (Padlet / Canva)

Учні об’єднуються у групи й створюють цифровий постер або коротку презентацію, де показують застосування тригонометрії в архітектурі, техніці, фізиці, астрономії. Використання Padlet або Canva дозволяє творчо представити результати, розвиває комунікативні навички та міжпредметні зв’язки [18].

Приклад 6. Онлайн-тестування “Перетворення графіків” (Google Forms або На Урок)

Після вивчення теми “Перетворення графіків тригонометричних функцій” учні проходять тест, у якому необхідно вибрати правильне зображення графіка після зміни параметрів функції. Результати зберігаються автоматично, що дозволяє вчителю здійснювати формувальне оцінювання.

Таким чином, розробка уроків з теми «Тригонометричні функції» із використанням цифрових освітніх технологій є не лише вимогою сучасної освітньої політики, а й ефективним шляхом підвищення якості навчального процесу. Інтеграція ІКТ у викладання цієї теми дозволяє зробити складні математичні поняття більш наочними, забезпечує можливість дослідження функцій у динаміці, сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення учнів.

Використання цифрових інструментів, таких як GeoGebra, Desmos, Wordwall, LearningApps, Classtime, Google Classroom та платформи На Урок, відкриває широкі можливості для реалізації диференційованого та особистісно орієнтованого навчання. Вони забезпечують активну взаємодію між учнем і навчальним матеріалом, підвищують мотивацію та створюють сприятливі умови для самостійного опанування знань.

Методика створення уроків із цифровими компонентами показала, що найефективнішим підходом є поєднання традиційних методів пояснення та практики з елементами інтерактивного моделювання, дослідження та рефлексії. Такий формат уроку перетворює учня з пасивного слухача на активного учасника освітнього процесу, здатного самостійно аналізувати, перевіряти та узагальнювати результати [29].

Розглянуті методичні підходи та цифрові інструменти стали основою для створення власних розробок уроків, спрямованих на підвищення ефективності навчання тригонометричних функцій. У наступних підрозділах подано приклади практичної реалізації запропонованих методик — детально описано структуру уроків, дидактичні цілі, цифрові засоби, що використовувалися, а також особливості організації роботи учнів на різних етапах заняття.

Приклад 1. Урок на тему «Побудова графіка функції $y = sin\,x$» із використанням інтерактивної дошки та GeoGebra.

Мета:

- сформувати в учнів уявлення про графік функції $y = sin\,x$;
- навчити будувати графік синусоїди на основі таблиці значень і за допомогою GeoGebra;
- розвивати вміння спостерігати, робити висновки, працювати в групі та користуватися цифровими засобами навчання.

Хід уроку:

І. Організаційний момент (2 хв.)

Учитель: Доброго дня, діти! Сьогодні у нас незвичайний урок — ми будемо досліджувати тригонометричну функцію синуса за допомогою комп’ютерної програми GeoGebra.

Учитель: Перевіримо готовність до роботи: чи всі мають зошити, ручки, калькулятори?

Коротке налаштування на роботу. Створюється позитивний емоційний настрій у класі.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв.)

Учитель: Пригадайте, що таке синус кута. Як його можна знайти за одиничним колом?

Учні відповідають, формулюють визначення.

Учитель: Пригадаємо значення синуса для деяких кутів — 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

(Записує таблицю на дошці. Учні відповідають.)

Учитель: Добре. Сьогодні ми побачимо, як змінюється синус кута при збільшенні аргументу й як це можна побачити на графіку.

III. Мотивація навчальної діяльності (3 хв.)

Учитель: Ми часто говоримо про синус і косинус у формулах. Але чи замислювались ви, як виглядає функція синуса?

Показує приклади з життя: хвилі, коливання маятника, звук.

Учитель: Ці явища мають одну спільну закономірність — синусоїдальну. Саме таку форму має графік функції $y = sin\ x$. Сьогодні побачимо це наочно.

IV. Вивчення нового матеріалу (15 хв.)

Учитель: Відкриваю програму GeoGebra. Подивіться на екран — це одиничне коло. Коли точка рухається по колу, її координата по вертикалі — це значення синуса.

Учитель поступово змінює кут і показує, як змінюється значення $sin\ x$.

Учитель: Зробимо таблицю значень функції $y = sin\ x$ для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 270°, 360°. Називайте значення, я їх запишу.

(Учні називають значення, учитель записує на інтерактивній дошці.)

Учитель: А тепер нанесемо ці точки на координатну площину.

(Будує точки, з’єднує їх плавною лінією.)

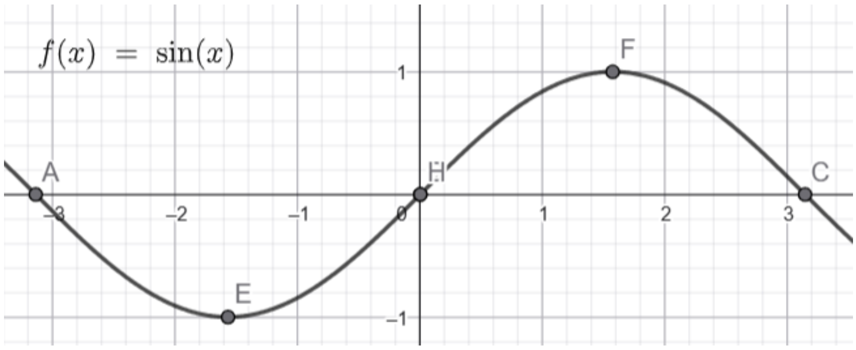

Рис. 5

Учитель: Подивіться — ми отримали графік, який має хвилясту форму. Це — синусоїда. Вона повторюється через кожні 360°, має максимум 1 і мінімум −1.

Далі учитель демонструє, як змінюється графік, якщо у формулі змінити параметри.

Учитель: Введу рівняння $y = 2sin\ x$. Що спостерігаєте?

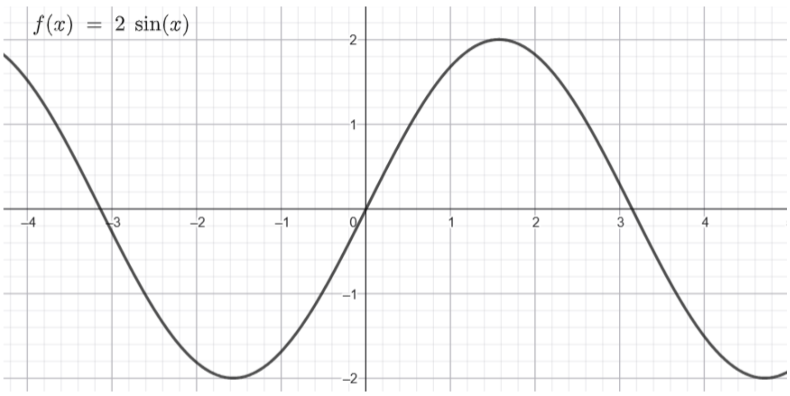

Рис. 5

Учні: Графік став вищим.

Учитель: Отже, коефіцієнт 2 збільшує амплітуду.

Учитель: А тепер змінимо рівняння на $y = sin(2x)$.

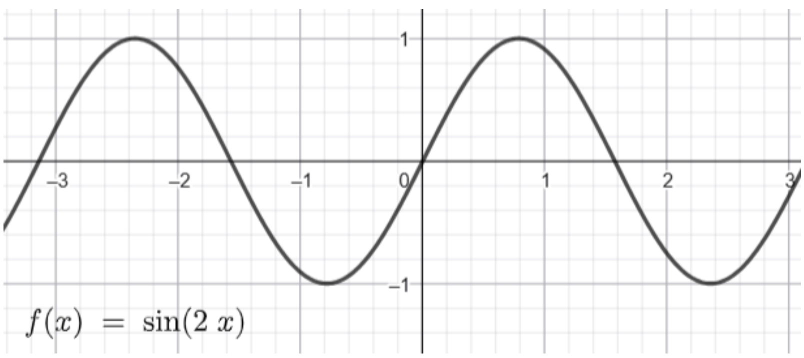

Рис. 7

Учні: Графік став частішим.

Учитель: Так, змінився період — функція повторюється частіше.

Учитель підсумовує спостереження: коефіцієнт перед синусом впливає на висоту графіка (амплітуду), а коефіцієнт біля х — на частоту коливань (період).

V. Формування умінь і навичок (15 хв.)

Учитель: А тепер спробуємо самостійно. Я розділю вас на групи. Кожна отримає одне рівняння для побудови в GeoGebra: $y = 0{,}5\, sin\, x$; $y = 2\, sin\, x$; $y = sin(2x)$; $y = sin(x + 45°)$.

Кожна група будує свій графік і пояснює, як змінилась форма кривої.

Учні працюють біля дошки або за власними пристроями. Після виконання завдання коротко презентують результати.

Учитель: Молодці. Ви помітили, що лише невеликі зміни у формулі створюють зовсім інший графік.

VI. Підбиття підсумків уроку (5 хв.)

Учитель: Отже, сьогодні ми дізналися, як виглядає графік функції $y = sin\, x,$ і побачили, як параметри рівняння впливають на його форму.

Бесіда з класом:

- Що означає амплітуда графіка?
- Що визначає період функції?
- Як впливає коефіцієнт перед х на вигляд графіка?

Учні відповідають.

Учитель: Молодці! Ви сьогодні не просто побачили формулу, а створили її графік власноруч.

VII. Домашнє завдання (3 хв.)

Побудувати в GeoGebra або у зошиті графік функцій: $y = cos\, x$, $y = sin\, x$. Порівняти їх і записати спільні та відмінні риси.

Розробка уроку за темою «Побудова графіка функції $y = sin\, x$ » дозволила систематизувати та узагальнити теоретичні знання з предмету, а також визначити оптимальну послідовність подачі навчального матеріалу. У процесі планування було враховано різні методи і прийоми навчання, зокрема інтерактивні завдання, практичні вправи та наочні матеріали, що сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів та формуванню ключових компетентностей. Структура уроку передбачає логічне поєднання теоретичної та практичної частин, можливості диференціації навчальної роботи для учнів з різним рівнем підготовки та застосування сучасних цифрових засобів. Розробка цього уроку підтверджує важливість методично обґрунтованого планування навчального процесу і створює основу для подальшого використання напрацювань у практичній діяльності.

Приклад 2. Урок на тему «Дослідження графіка функції $y = cos\, x$ та її перетворень»

Мета:

- Поглибити знання учнів про графік функції $y = cos\, x$;
- Навчити будувати та досліджувати графіки функції $y = cos\, x$ із різними параметрами за допомогою GeoGebra;
- Розвивати навички дослідження функцій, аналітичного мислення та роботи в команді;
- Ознайомити з застосуванням цифрових інструментів для моделювання та аналізу математичних залежностей.

Хід уроку

I. Організаційний момент (2 хв.)

Учитель: Доброго дня, діти! Сьогодні на уроці ми будемо досліджувати графік функції $y = cos\, x$ і навчимося працювати з її модифікаціями у програмі GeoGebra.

Перевірка готовності класу до роботи: чи всі мають зошити, ручки, ноутбуки або планшети; налаштування на плідну роботу та створення позитивної атмосфери.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв.)

Учитель: Пригадайте визначення косинуса та його значення для ключових кутів: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Учні відповідають та записують таблицю значень.

Учитель: Подивімося, як значення косинуса змінюються при зміні кута, і як це виглядає на графіку.

III. Мотивація навчальної діяльності (3 хв.)

Учитель: Графік функції $y = cos\, x$ часто використовується у фізиці, інженерії та техніці — хвилі, коливання маятника, електричні сигнали.

Показ коротких прикладів із життя, що демонструє реальні процеси, які повторюють косинусоїдальну форму.

Учитель відкриває GeoGebra та демонструє одиничне коло.

Учитель: Координата точки по вертикалі при русі по колу — це значення $cos\, x$.

Учні спостерігають за рухом точки та фіксують зміни значення функції.

Створюється таблиця значень $y = cos\, x$ для кутів $0°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 150°,\ 180°,\ 270°,\ 360°$.

Будуються точки на координатній площині, з'єднуються лінією, отримується графік косинусоїди.

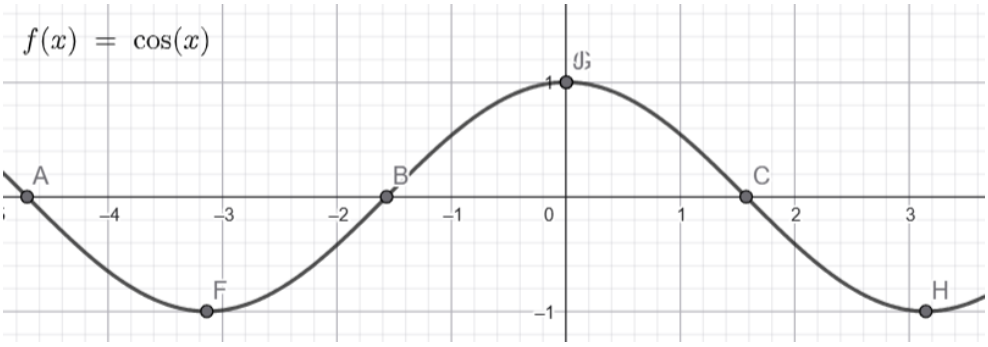

Рис. 8

Демонстрація впливу параметрів на графік:

- $y = 2\, cos\, x$ → збільшення амплітуди;

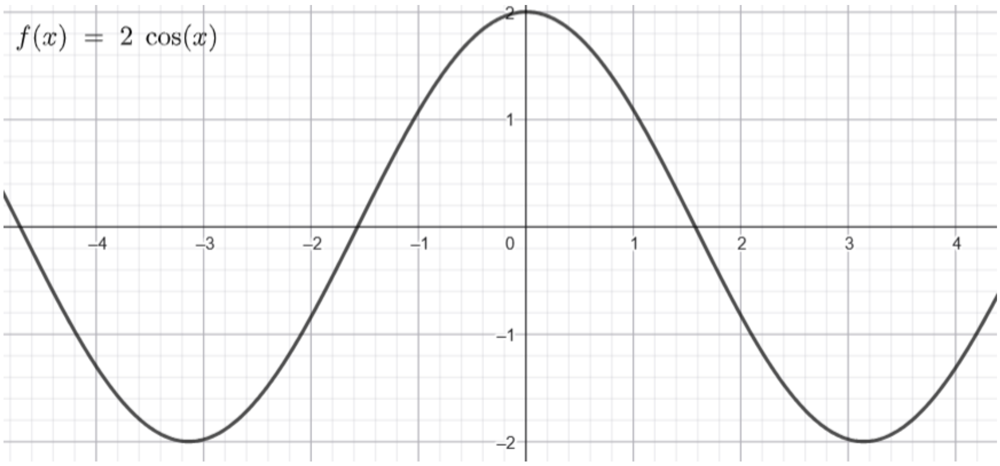

Рис. 9

- $y = cos(0.5x)$ → збільшення періоду;

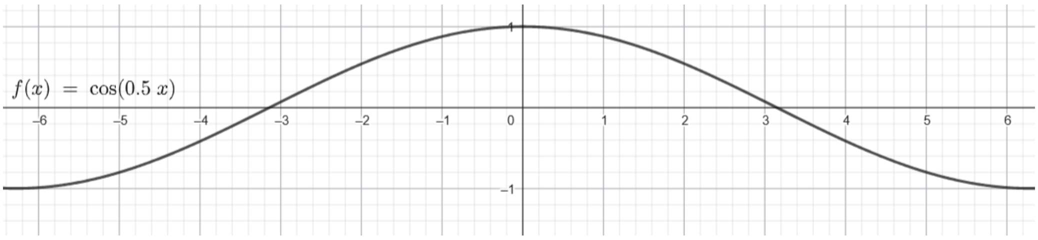

Рис. 10

- $y = cos(x + 45°)$ → фазовий зсув.

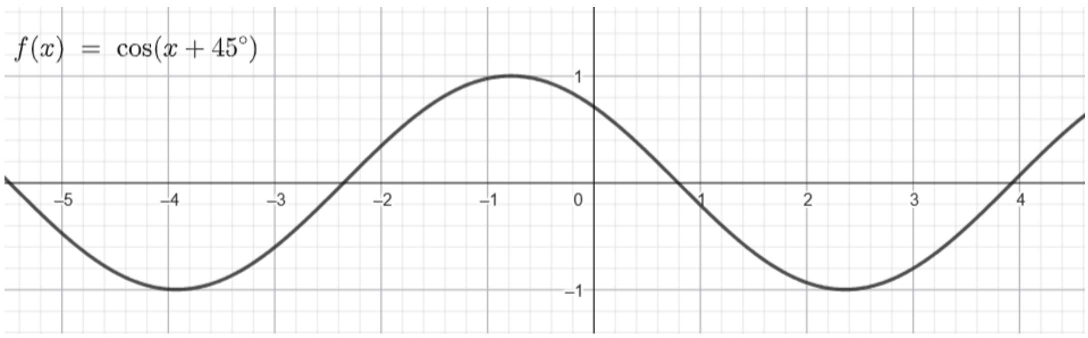

Рис. 11

Учитель обговорює з учнями вплив кожного параметра на графік та формує висновки.

V. Формування умінь і навичок (15 хв.)

Учні поділяються на групи. Кожна група отримує завдання дослідити свій варіант функції:

- $y = 0.5\, cos\, x$;
- $y = 3\, cos\, x$;
- $y = cos(2x)$;

- $y = cos(x - 60°)$ [3].

Учні будують графіки у GeoGebra, аналізують, обговорюють зміни амплітуди, періоду та фазового зсуву.

Після виконання завдання групи коротко презентують результати класу, демонструють графіки та пояснюють спостереження. Після чого учні виконують завдання із підручника.

VI. Підбиття підсумків уроку (5 хв.)

Учитель: Сьогодні ми дізналися, як виглядає графік функції $y = cos\, x$ та як параметри рівняння впливають на його форму.

Обговорюються ключові питання:

- Що таке амплітуда графіка?
- Як визначається період функції?
- Як змінює графік фазовий зсув?

Учитель узагальнює спостереження та підкреслює практичне значення отриманих знань.

VII. Домашнє завдання (3 хв.)

1. Побудувати графіки функцій $y = sin\, x, y = cos\, x$ та $y = sin(x + 30°)$ у GeoGebra або зошиті;

2. Порівняти графіки та описати вплив параметрів на амплітуду, період та зсув графіків;

3. Підготувати короткі висновки для обговорення на наступному уроці.

Під час проведення уроку учні активно залучалися до дослідницької діяльності, що полягала у спостереженні, моделюванні та аналізі графіків функції $y = cos\, x$ за допомогою цифрового інструменту GeoGebra. Робота в групах дозволила обговорювати отримані результати, порівнювати різні варіанти графіків та формувати власні висновки щодо впливу параметрів на форму функції.

Застосування інтерактивних моделей сприяло розвитку в учнів аналітичного мислення, уміння робити узагальнення та систематизувати спостереження. Крім того, учні мали змогу наочно побачити зв'язок між математичними формулами та їх практичними застосуваннями, що підвищує мотивацію та зацікавленість у вивченні тригонометричних функцій.

Таке поєднання теоретичного пояснення, самостійного дослідження та цифрового моделювання створює сприятливі умови для глибокого засвоєння матеріалу та формування ключових компетентностей у старшокласників.

РОЗДІЛ 3. ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕГРАЦІЇ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Переваги та потенційні труднощі використання цифрових інструментів

Цифровізація освіти є одним із ключових напрямів модернізації сучасної школи, а математика — однією з тих навчальних дисциплін, де цифрові технології розкриваються найповніше. Це пов'язано з тим, що математичні поняття, зокрема тригонометричні функції, часто мають абстрактний характер і вимагають значної кількості візуалізації, багаторазового повторення, динамічності, поетапного аналізу та можливості моделювання.

У традиційному освітньому процесі ці можливості обмежені: крейдою, дошкою та статичними рисунками важко відтворити змінність параметрів синусоїди, побачити, як період залежить від коефіцієнта b, чи дослідити вплив зсувів c та d. Саме тому цифрові технології стають не лише допоміжним елементом, а фактично — необхідною умовою ефективного навчання теми «Тригонометричні функції».

У цьому підрозділі проаналізовано ключові переваги цифрових інструментів у роботі з тригонометричним матеріалом, а також визначено низку труднощів, які можуть виникати при їх інтеграції в уроки математики. Такий огляд дозволяє усвідомити реальні можливості цифровізації та уникнути необґрунтованих очікувань під час упровадження технологій у навчальний процес.

Переваги використання цифрових інструментів

Цифрові освітні технології відкривають широкі можливості для візуалізації, моделювання та дослідження тригонометричних функцій. Переваги їх застосування можна умовно поділити на методичні, пізнавальні, мотиваційні та організаційні.

1) *Інтерактивна візуалізація складних абстракцій*

Однією з найвагоміших переваг цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos, інтерактивні симуляції) є здатність перетворювати абстрактні тригонометричні поняття на наочні та динамічні моделі. Зокрема, учні можуть у режимі реального часу змінювати параметри функцій $y = a\,sin(bx + c) + d$, аналізувати їхній вплив на амплітуду, період чи фазовий зсув. Такий формат сприяє глибшому розумінню закономірностей та сутності функціональних залежностей, яких складно досягти під час роботи лише з підручником чи статичними малюнками [16].

2) *Підсилення дослідницької діяльності учнів*

Цифрові інструменти дозволяють організувати навчання на основі дослідження: учні не просто відтворюють готові правила, а самостійно відкривають властивості тригонометричних функцій.

Завдяки інтерактивним графікам, вимірювальним інструментам, таблицям зміни параметрів учні можуть висувати гіпотези, перевіряти їх, робити висновки — тобто опановувати матеріал на рівні глибокого розуміння, а не формального запам'ятовування.

3) *Підвищення мотивації та залучення учнів*

Використання сучасних цифрових форматів — інтерактивних вправ, мінісимуляцій, візуальних моделей — підвищує інтерес учнів до змісту тригонометрії, яка традиційно вважається однією з найскладніших тем.

Учні сприймають роботу з цифровими інструментами як «життєву», технологічно близьку до їхніх потреб і досвіду, що формує внутрішню мотивацію до навчання, а не лише зовнішню.

4) *Індивідуалізація навчання та можливість диференціації*

Цифрові платформи (Classroom, інтерактивні тести, онлайн-середовища) дозволяють учителю розробляти диференційовані завдання різного рівня складності: базові, на застосування, на поглиблений аналіз.

У темі тригонометричних функцій це особливо важливо, оскільки рівень абстрактності матеріалу є різним для різних учнів. Завдяки цифровим ресурсам кожен учень може працювати у власному темпі, повертаючись до складних моментів або, навпаки, поглиблюючи вивчення [30].

5) *Автоматизація перевірки та можливість отримання миттєвого зворотного зв’язку*

Тестові платформи (Google Forms, Classtime, Online Test Pad) забезпечують миттєву перевірку знань і підказки у разі помилки.

Для тригонометрії це надзвичайно ефективно: учні одразу бачать, де саме допущено неточність — у перетвореннях, аналізі графіка чи обчисленні. Це підсилює самооцінювання та сприяє формуванню в учнів відповідальності за результат [12].

Труднощі використання цифрових інструментів

Використання цифрових технологій у навчанні тригонометричних функцій, незважаючи на численні переваги, пов’язане з певними труднощами, які слід враховувати під час планування уроку. Вони виникають не лише через технічні обмеження, але й через специфіку навчального матеріалу, психологічні особливості учнів та методичну підготовку вчителя. Розуміння цих труднощів дозволяє ефективно інтегрувати цифрові ресурси, мінімізувати негативні наслідки та підвищити результативність уроку.

1) *Технічні обмеження та нерівність доступу*

Наявність комп’ютерів, планшетів або стабільного інтернету не завжди гарантована у всіх школах, що створює дисбаланс між учнями та класами. Технічні обмеження можуть проявлятися у:

- нестабільному або повільному інтернет-з’єднанні;
- застарілих комп’ютерних пристроях, які не підтримують сучасні програми;
- недостатній кількості цифрових пристроїв для всього класу;
- відсутності доступу до ліцензійного програмного забезпечення.

Це ускладнює організацію повноцінного інтерактивного уроку, особливо під час проведення експериментальних або дослідницьких завдань із використанням графічних моделей тригонометричних функцій.

Учителю доводиться заздалегідь продумувати альтернативні варіанти роботи:

- використання друкованих матеріалів або конспектів;
- чергування роботи на комп’ютерах і ручних побудов;
- застосування браузерних версій програм (наприклад, GeoGebra або Desmos), які не потребують встановлення;
- поділ класу на групи для послідовного виконання завдань.

Такий підхід дозволяє частково компенсувати технічні недоліки та забезпечити рівний доступ до навчальних матеріалів для всіх учнів [27].

2) Високі вимоги до професійної підготовки вчителя

Ефективне використання цифрових інструментів можливе лише за умови високого рівня цифрової та методичної компетентності педагога. Для роботи з тригонометричними функціями вчитель має:

- володіти методикою подачі матеріалу з використанням цифрових моделей;
- мати практичні навички роботи з відповідними програмами та платформами;
- вміти підбирати інструменти відповідно до дидактичних цілей уроку;
- оперативно реагувати на технічні проблеми під час заняття.

Недостатня підготовка може призвести до формального або поверхневого використання технологій, коли цифрові ресурси застосовуються лише як ілюстративний елемент, без формування глибокого розуміння матеріалу. У такому випадку урок втрачає свою ефективність, а учні не отримують необхідного досвіду дослідження і самостійного аналізу тригонометричних функцій.

Для мінімізації цих ризиків важливо проводити систематичну підготовку вчителів, методичні семінари та тренінги, а також створювати покрокові інструкції для роботи з цифровими платформами.

3) *Ризик формального застосування технологій*

Найпоширенішою помилкою є використання цифрових засобів «заради використання», коли основна увага приділяється технологічному ефекту, а не освітній цінності.

У таких випадках учні можуть:

- сприймати цифрові моделі пасивно, не аналізуючи закономірності;
- орієнтуватися на готові графіки, не формуючи навичок побудови власних;
- втрачати мотивацію до самостійного мислення і дослідження.

Цифровий інструмент повинен виконувати чітку дидактичну функцію: пояснювати, тренувати, закріплювати або контролювати знання. Якщо технологія не підсилює навчальну мету, її використання стає зайвим і навіть шкідливим, особливо у темі тригонометричних функцій, де важлива послідовність, логіка та експериментальна перевірка гіпотез.

4) *Перевантаження інформацією та підміна мислення готовими візуалізаціями*

Надмірна кількість цифрових елементів може створити когнітивне перевантаження. Якщо учень отримує занадто багато візуальної інформації одночасно, це ускладнює осмислення, аналіз і формування власних висновків.

Існує також ризик, що автоматично побудовані графіки або готові моделі підмінять собою логічні міркування. У такій ситуації учні можуть спостерігати закономірності, але не розуміти їх причинно-наслідкових зв’язків [6].

Тому використання цифрових засобів повинно поєднуватися з класичними методами розвитку логічного та аналітичного мислення:

- ручним побудовами графіків;
- обговоренням результатів у групах;
- постановкою питань щодо причинно-наслідкових зв’язків між параметрами функції;

- систематичним поєднанням експерименту з теоретичним поясненням.

Це дозволяє досягти балансу між наочною демонстрацією і розвитком мислення учнів, а також гарантує, що цифрові технології виконують функцію засобу навчання, а не лише естетичного або ілюстративного елементу.

Підсумовуючи розгляд переваг та потенційних труднощів використання цифрових інструментів у навчанні тригонометричних функцій, можна зробити кілька ключових висновків. По-перше, цифрові технології значно підвищують наочність матеріалу, створюють умови для дослідницької діяльності учнів, сприяють розвитку аналітичного та критичного мислення, а також підвищують мотивацію до навчання. Використання динамічних моделей, інтерактивних графіків і програмних платформ дозволяє учням у реальному часі досліджувати властивості тригонометричних функцій, формувати власні висновки та експериментально перевіряти гіпотези.

По-друге, інтеграція цифрових технологій несе в собі певні виклики: технічні обмеження, нерівність доступу до пристроїв та інтернету, високі вимоги до цифрової та методичної компетентності вчителя, ризик формального або декоративного використання технологій, а також можливе когнітивне перевантаження учнів. Ці труднощі вимагають продуманого планування уроків, підбору оптимальних інструментів та поєднання цифрових і традиційних методів навчання.

По-третє, потенційні труднощі не є перешкодою для ефективного використання цифрових технологій, а скоріше вказують на напрями розвитку методичної компетентності вчителя та вдосконалення організації навчального процесу. Усвідомлене подолання цих викликів дозволяє забезпечити оптимальне поєднання технологічного та дидактичного аспектів уроку, що є критично важливим у темі тригонометричних функцій, де значну роль відіграють логіка, послідовність та експериментальна перевірка властивостей функцій.

3.2. Практичні рекомендації щодо інтеграції цифрових технологій у уроки математики

Впровадження цифрових технологій у навчальний процес вимагає системного та продуманого підходу. Як показано у підрозділі 3.1, цифрові інструменти мають значний потенціал для підвищення наочності, мотивації учнів та розвитку дослідницьких компетентностей. Однак ефективність їхнього використання залежить не лише від наявності технічних ресурсів, а й від методичного опрацювання, правильного вибору інструментів і планування уроку.

У даному підрозділі представлені практичні рекомендації щодо інтеграції цифрових технологій у уроки математики з особливим акцентом на навчання тригонометричних функцій. Рекомендації охоплюють вибір інструментів, поєднання цифрових і традиційних методів, організацію навчальної діяльності та управління процесом дослідження функцій учнями.

1) *Вибір цифрових інструментів відповідно до цілей уроку*

Цифровий інструмент має відповідати конкретній дидактичній меті уроку. Наприклад, для вивчення властивостей тригонометричних функцій ефективними є:

- GeoGebra — для динамічної побудови графіків функцій, експериментальної зміни параметрів та візуалізації взаємозв'язку між одиничним колом і графіком;
- Desmos — для інтерактивних вправ з графіками та перевірки знань учнів;
- Google Classroom/Forms — для організації самостійної та контрольної роботи, отримання миттєвого зворотного зв'язку;
- Jamboard або інші онлайн-дошки — для колективного аналізу графіків, обговорення результатів досліджень.

Вибір інструменту слід робити залежно від навчальної мети: наочність, тренування обчислювальних навичок, формування дослідницьких компетентностей або контроль знань. Усі інструменти повинні поєднуватися між собою та доповнювати традиційні методи навчання.

2) Поєднання цифрових та традиційних методів навчання

Цифрові технології не повинні повністю замінювати класичні методи. Для ефективного засвоєння тригонометричних функцій рекомендується комбінувати:

- Ручні побудови та креслення на графічному папері для формування уявлень про періодичність та амплітуду функцій;
- Візуалізацію на цифрових платформах для експериментальної перевірки властивостей функцій;
- Обговорення результатів у групах для розвитку логічного та аналітичного мислення;
- Завдання для самостійної роботи у цифровому середовищі для закріплення матеріалу та контролю знань.

Такий інтегрований підхід дозволяє уникнути когнітивного перевантаження учнів та формує баланс між активним мисленням і візуальним сприйняттям матеріалу [17].

3) Організація дослідницької діяльності учнів

Однією з головних переваг цифрових технологій є можливість організації дослідницької діяльності, яка сприяє активному засвоєнню навчального матеріалу та розвитку аналітичного мислення. Цифрові інструменти дозволяють учням не лише спостерігати готові графіки, а й проводити експерименти, змінювати параметри функцій та самостійно робити висновки.

Практичні рекомендації для організації дослідницької діяльності включають:

- Моделювання та експерименти

Учні самостійно змінюють параметри функцій (амлітуда, період, фазовий зсув, вертикальне зміщення) та спостерігають зміни графіка. Це сприяє глибшому розумінню закономірностей і закономірних змін у поведінці тригонометричних функцій. Завдяки цифровим платформам, таким як

GeoGebra, учні можуть досліджувати графіки в режимі реального часу, аналізуючи вплив кожного параметра окремо та у поєднанні.

- Фіксація результатів

Для систематизації досліджень учні заносять спостереження в Google Sheets або спільні онлайн-дошки. Це дозволяє не лише відстежувати власні експерименти, а й порівнювати результати між групами, обговорювати різні підходи та знаходити оптимальні рішення. Такий підхід розвиває навички роботи з цифровими даними та формує уміння аналізувати великі обсяги інформації.

- Формулювання висновків

Учні роблять власні висновки щодо впливу параметрів на графік, після чого обговорюють їх у класі. Це дозволяє поєднувати індивідуальне мислення з колективним аналізом, формує навички аргументації та критичного оцінювання результатів.

- Систематизація знань

Підсумкові завдання у формі інтерактивних вправ або тестів допомагають закріпити отримані дослідницькі висновки. Учні не просто запам’ятовують графіки, а розуміють принципи, що лежать в основі побудови функцій та їхніх трансформацій.

Такий підхід не лише розвиває аналітичне мислення, а й формує у школярів дослідницькі компетентності, навички роботи з цифровими даними та здатність застосовувати отримані знання у практичних ситуаціях. Учні навчаються відстежувати закономірності, порівнювати результати та робити обґрунтовані висновки, що відповідає сучасним освітнім стандартам [11].

4) Управління навчальним процесом та зворотний зв’язок

Для ефективного використання цифрових технологій важливо організувати структуру уроку так, щоб учні мали чіткі інструкції та знали очікувані результати. Рекомендації включають:

- Покрокові алгоритми роботи з цифровими інструментами для кожного етапу уроку. Це дозволяє уникнути хаотичної роботи та забезпечує послідовне освоєння матеріалу.
- Миттєвий зворотний зв’язок через Google Forms або автоматизовані платформи. Це допомагає вчителю оперативно визначати прогалини в знаннях та коригувати роботу учнів під час уроку.
- Моніторинг прогресу учнів за допомогою спільних дошок, таблиць та онлайн-сервісів. Такий підхід дозволяє бачити індивідуальні досягнення та загальний рівень засвоєння матеріалу.
- Врахування індивідуальних потреб — диференціація завдань залежно від рівня підготовки учнів. Це забезпечує максимальну ефективність навчання та підвищує мотивацію.

Таке планування дозволяє забезпечити активну взаємодію між учнями та вчителем, стимулює самостійну навчальну діяльність, а також створює умови для розвитку дослідницьких і аналітичних компетентностей.

5) *Планування уроків із урахуванням методичної послідовності*

При інтеграції цифрових інструментів до уроків тригонометрії важливо дотримуватися логічної структури, яка забезпечує поступовий перехід від наочного сприйняття до аналітичного осмислення матеріалу:

- Мотиваційний етап — демонстрація прикладів застосування тригонометричних функцій у реальному житті (музика, електротехніка, хвилі, механічні коливання). Це стимулює інтерес учнів і формує усвідомлення практичної цінності знань.
- Ознайомлення з новим матеріалом — поєднання традиційних пояснень і демонстрацій на цифрових платформах, що дозволяє побачити закономірності у динамічному середовищі.
- Дослідницька робота учнів — моделювання, зміна параметрів функцій, фіксація результатів у спільних таблицях та дошках, формування висновків.

- Обговорення та узагальнення — аналіз графіків, порівняння результатів у групах, підведення систематизованих висновків про властивості функцій.
- Закріплення та самостійна робота — інтерактивні вправи, тестування, домашні завдання у цифровому середовищі, що забезпечують закріплення знань та формування навичок самостійного аналізу.

Ця послідовність дозволяє не лише розвинути аналітичне мислення та дослідницькі навички учнів, а й інтегрувати цифрові інструменти у традиційну структуру уроку, забезпечуючи ефективне і послідовне навчання тригонометричних функцій [29].

Таким чином, застосування цифрових технологій у навчанні тригонометричних функцій не лише сприяє розвитку аналітичного та дослідницького мислення учнів, а й підвищує ефективність уроку загалом. Правильне поєднання цифрових інструментів із традиційними методами навчання дозволяє створити системний та цілісний процес засвоєння матеріалу, забезпечує активну участь учнів і формує у них практичні навички роботи з графіками та функціональними залежностями. Завдяки такій організації навчального процесу уроки стають більш інтерактивними, мотивуючими та результативними, що підтверджує доцільність і перспективність інтеграції цифрових технологій у сучасну математичну освіту.

3.3 Розв'язування задач з тригонометричних функцій із використанням інтерактивних методів

У сучасних умовах цифровізації освіти інтерактивні методи навчання відіграють ключову роль у формуванні глибокого та усвідомленого розуміння властивостей тригонометричних функцій. Поєднання візуалізації, динамічних моделей та практико-орієнтованих завдань дозволяє підвищити рівень залученості учнів, активізувати пізнавальну діяльність і забезпечити міцне засвоєння матеріалу.

Інтерактивні цифрові ресурси створюють умови для дослідницького підходу, у межах якого учні не лише виконують алгоритмічні дії, а й самостійно відкривають закономірності, аналізуючи зміни графіків функцій та їх параметрів у реальному часі. Такий підхід відповідає компетентнісній парадигмі навчання математики, де провідним результатом є формування аналітичного мислення та вміння застосовувати математичні знання в різних ситуаціях. Не менш важливим є використання онлайн-тестів та платформ формувального оцінювання (Kahoot, Quizizz, Classtime). Завдяки ним можна оперативно перевірити рівень засвоєння матеріалу під час розв’язування задач різної складності. Учні отримують миттєвий результат, а вчитель – аналітику щодо типових помилок, що допомагає скоригувати подальшу роботу.

Інтерактивні цифрові інструменти дають змогу не лише пояснювати властивості тригонометричних функцій, а й організовувати практичну діяльність учнів через дослідження, а не просте відтворення алгоритмів. Нижче наведено приклади типових задач і способи їх розв’язання із використанням сучасних цифрових ресурсів.

Завдання 1. Обчислення значення тригонометричної функції

Умова. Знайти значення $sin\frac{5\pi}{6}$ [3].

Роз’язання.

1. Кут $\frac{5\pi}{6}$ знаходиться у II чверті, оскільки

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < \pi = \frac{6\pi}{6}.$$

2. Визначаємо відповідний гострий кут:

$$\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

3. У II чверті синус має позитивне значення, тому

$$sin\frac{5\pi}{6} = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Інтерактивні методи:

– Будуємо кута на одиничному колі у GeoGebra

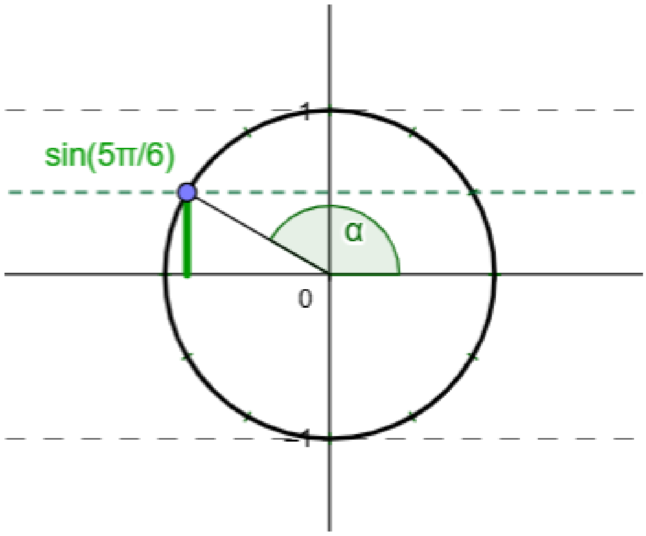

Рис. 12

Завдання 2. Доведення основної тригонометричної тотожності

Умова. Довести тотожність:

$$1 + tg^2\,x = \frac{1}{cos^2\,x}\ [8].$$

Розв’язання:

1. Використаємо відому тотожність:

$$sin^2x + cos^2x = 1.$$

2. Поділимо обидві частини рівності cos^2x, враховуючи, що $\cos x \neq 0$:

$$\frac{sin^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

3. Отримаємо:

$$tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}.$$

Відповідь: тотожність доведено.

Інтерактивні методи:

– Використовуючи програму GeoGebra будуємо графіки $y = tg^2x + 1\ і\ y = \frac{1}{cos^2x}$ та порівняти їх.

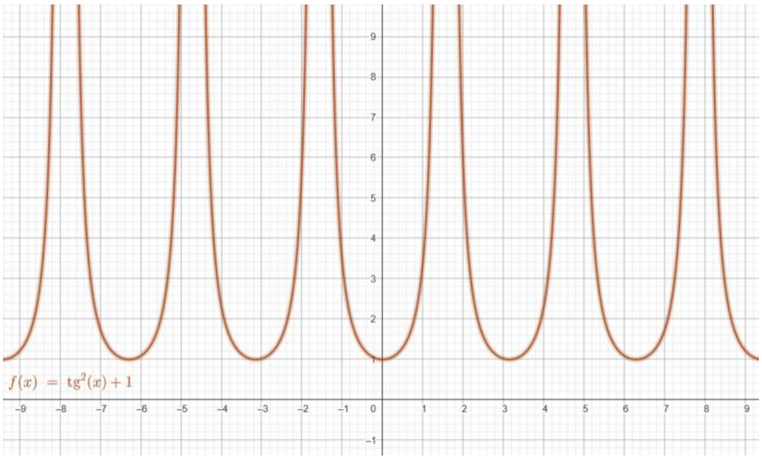

Рис. 12

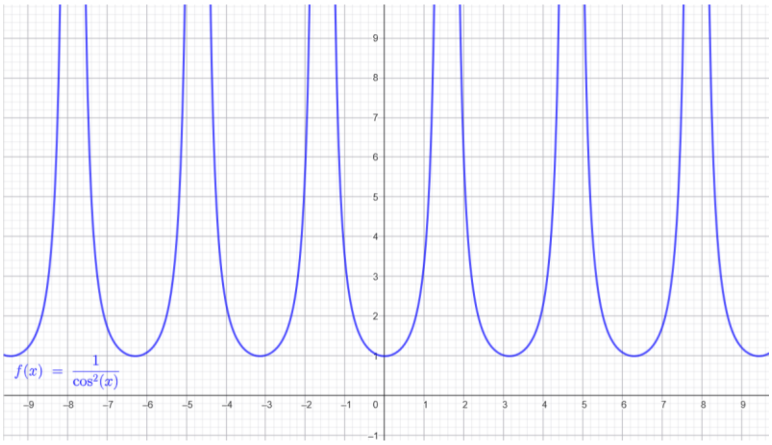

Рис. 14

На графіках чітко видно, що обидві функці збігаються в областях, де вони визначенні. Це дає змогу зробити висновок, що тотожність не лише доведенна алгебраїчно, а й підтвердженна графічно, що підсилює розуміння структури тригонометричних виразів.

Завдання 3. Розв’язування простої тригонометричної рівності

Умова. Розв’язати рівняння

$$sin\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x \in [0; 2\pi).$$

Розв’язання:

1. Знайдемо, що $sin\, \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \;\; \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

2. Значення синуса з мінусом розташовані симетрично у III та IV чвертях:

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

3. Обидва розв'язки належать проміжку $x \in [0; 2\pi)$.

Відповідь: $x = \frac{5\pi}{4} 2k\pi,\ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi.$

Інтерактивні методи:

– у Desmos будуємо графіки $y = sin\,x$ та лінію $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

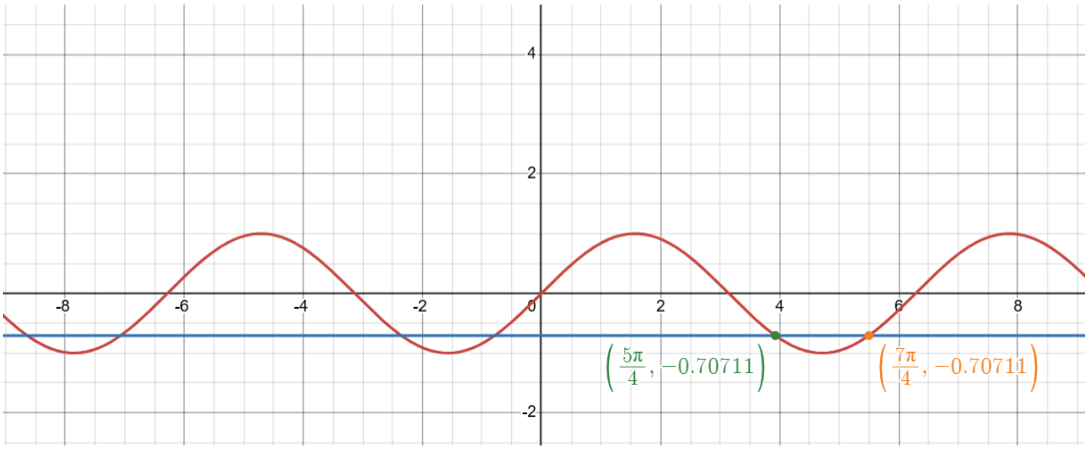

Рис. 15

На графіку видно, що лінія $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ перетинає синусоїду у двох точках на проміжку $[0; 2\pi)$. Саме ці точки відповідають знайденим розв'язкам рівняння. Інтерактивна побудова дозволяє самостійно переконатися у правильності розв'язання.

Завдання 4. Перетворення тригонометричних функцій.

Умова. Спростіть вираз

$$\frac{sin\,x\ *\ tg\,x}{1\ + cos\,x} + \frac{1\ -\ cos\,x}{sin\,x}\ [9].$$

Розв'язання:

Замінюємо $tg\ x$ через основні функції

$$tg\ x = \frac{sin\,x}{cos\,x}.$$

Підставляємо

$$\frac{sin\,x\ *\ \frac{sin\,x}{cos\,x}}{1\ + cos\,x} + \frac{1\ -\ cos\,x}{sin\,x},$$

$$\frac{sin^2\,x}{cos\,x\,(1\,+cos\,x)}+\frac{1\,-\,cos\,x}{sin\,x}.$$

Використання тотожності $sin^2x = 1 - cos^2x$. Підставимо:

$$\frac{1-cos^2x}{cos\,x\,(1\,+cos\,x)}+\frac{1\,-\,cos\,x}{sin\,x},$$

$$\frac{(1-cos\,x)(1+cos\,x)}{cos\,x\,(1\,+cos\,x)}+\frac{1\,-\,cos\,x}{sin\,x},$$

$$\frac{1-cos\,x}{cos\,x}+\frac{1\,-\,cos\,x}{sin\,x}.$$

Оскільки в обох дробах чисельник однаковий:

$$(1-cos\,x)\left(\frac{1}{cos\,x}+\frac{1}{sin\,x}\right)$$

Зводимо дужку до спільного знаменника:

$$(1-cos\,x)\frac{sin\,x+cos\,x}{sin\,x\,cos\,x},$$

$$\frac{(1-cos\,x)(sin\,x+cos\,x)}{sin\,x\,cos\,x}.$$

Завдання 5. Перетворення тригонометричних функцій.

Умова. Спрощення виразу

$$\frac{sin\,x}{1-cos\,x}+\frac{1-cos\,x}{sin\,x}\ [15].$$

Розв’язання:

Обираємо такі x, щоб всі дроби були визначенні:

$$sin\,x\ \neq 0 \text{ і } 1-cos\,x \neq 0.$$

Отже, виключаємо точки $x = k\pi$ (бо там $sin\,x = 0$) і точки, де $cos\,x = 1$ (тобто $x = 2k\pi$, які вже включені в перше виключення). Далі працюємо при $sin\,x\ \neq 0$ і $cos\,x \neq 1$.

Зводимо до спільного знаменника $sin\,x(1 - cos\,x)$ і отримаємо

$$\frac{sin^2x+(1-cos\,x)^2}{sin\,x\,(1-cos\,x)}.$$

Обчислимо чисельник:

$sin\ ^2x + (1 - cos\ x)^2 = sin\ ^2x + (1 - 2\,cos\ x + cos^2\ x) = sin^2x + cos^2x + 1 - 2\,cos\ x = 1 + 1 - 2\,cos\ x = 2(1 - cos\ x).$

Отже

$$\frac{2(1 - cos\ x)}{sin\ x\ (1 - cos\ x)},$$

$$\frac{2}{sin\ x}, \text{при}\ sin\ x\ \neq 0 \text{ і } cos\ x \neq 1.$$

Інтерактивні методи:

Учні будують два графіки: $y = \frac{sin\ x}{1-cos\ x} + \frac{1-cos\ x}{sin\ x}$ та $y = \frac{2}{sin\ x}$ (на спільній області визначення) і переконуються, що графіки збігаються там, де визначені.

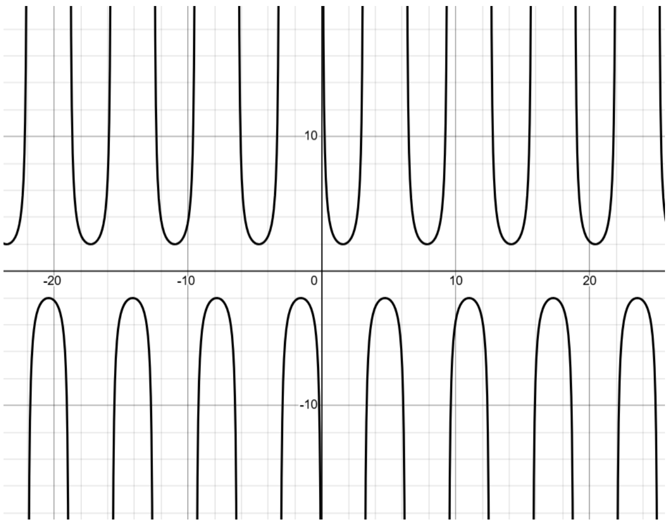

Рис. 16

Додатково можна показати вирази в символьному вікні Geogebra і попросити учнів скоротити кроки.

Завдання 6. Розв’язання рівнянь.

Умова. Розв’язати рівняння

$$2\,sin^2x + 5\,cos\ x - 4 = 0$$

Розв’язання:

Використаємо тотожність $sin^2x = 1 - cos^2x$, та підставляємо у рівняння:

$$2(1 - \ cos^2x) + 5\,cos\ x - 4 = 0$$

Отримали квадратне рівняння відносно $\cos x$, розкриваємо дужки та зводимо подібні доданки:

$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

$$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Нехай $\cos x = t,\ t \in [-1; 1]$, тоді $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Знаходимо дискримінант: $D = (-5)^2 - 4 * 2 * 2 = 25 - 16 = 9$.

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3.$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2*2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2*2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $t = \cos x$, то $x_1 = 2$ – не задовольняє увому $t \in [-1; 1]$.

Отже, розв'язуємо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$. Звідси $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$,

Для того, щоб наочно і правильно розв'язати рівняня застосовуємо інтерактивний метод. За допомогою програми Desmos ми виконуємо одиничне коло та будуємо вертикальну пряму $x = \frac{1}{2}$, щоб знайти точки перетину з одиничним колом. У місця перетину ми отримуємо два значення кута, як відповідають розв'язкам рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$. Перша точка розташована в I чверті та дорівнює куту $x = \frac{\pi}{3}$, друга точка у IV чверті і відповідає куту $x = \frac{5\pi}{3}$.

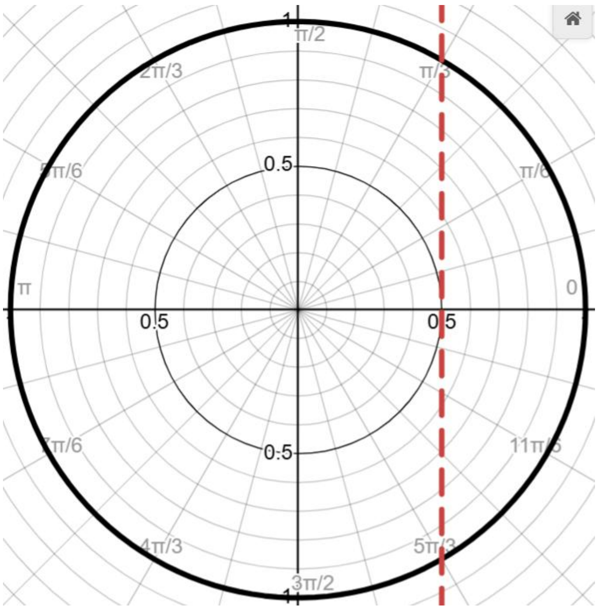

Рис. 16

Таким чином, загальний розв’язок рівняння можна подати у вигляді:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \text{ і } x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Така візуалізація є ефективним способом самоперевірки: учень бачить, що пряма перетинає коло саме у двох точках, які відповідають знайденим аналітично кутам, а відсутність перетину для $x = 2$ підтверджує правильність відкидання стороннього кореня.

Наступним етапом після засвоєння базових понять є перехід до завдань поглибленого рівня. Складність таких задач часто полягає в їх абстрактності, що потребує поєднання точних аналітичних методів із наочною візуалізацією. Використання інструментарію GeoGebra дозволяє подолати цей бар'єр, перетворюючи статичні формули на динамічні об’єкти. Це дає змогу учням не лише автоматично перевіряти рівності, а й аналізувати зміну властивостей функцій, будувати графічні аргументи та самостійно відкривати шляхи до розв’язання.

Приклад 1. Перевірити рівність:

$$\frac{1 - cos\,2x}{sin\,2x} + \frac{sin\,2x}{1 + cos\,2x} = 2\;tg\;x \text{ [9].}$$

Розв’язання:

Зводимо до спільного знаменника:

$$\frac{(1 - cos\,2x)(1 + cos\,2x)}{sin\,2x\,(1 + cos\,2x)} + \frac{sin\,2x \cdot sin\,2x}{sin\,2x\,(1 + cos\,2x)} =$$

$$= \frac{(1 - cos\,2x)(1 + cos\,2x) + sin\,2x \cdot sin\,2x}{sin\,2x\,(1 + cos\,2x)}.$$

Розкриваємо дужки в чисельнику за допомогою формули скороченого множення $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1^2 - cos^2 2x + sin^2 2x}{sin\,2x\,(1 + cos\,2x)}.$$

Застосовуємо основну тригонометричну тотожність. Ми знаємо, що $1 - cos^2 x = sin^2 x$, підставляємо:

$$\frac{sin^2 2x + sin^2 2x}{sin\, 2x\, (1 + cos\, 2x)} = \frac{2sin^2 2x}{sin\, 2x\, (1 + cos\, 2x)}.$$

Скорочуємо чисельник і знаменник на $sin\, 2x$ (за умови, що $sin\, 2x \neq 0$):

$$\frac{2\, sin\, 2x}{1 + cos\, 2x}.$$

Розписуємо чисельник і знаменник, щоб перейти до аргумента x, для цього застосовужмо подвійного аргумента $sin\, 2x = 2\, sin\, x\, cos\, x$, $1 + cos\, 2x = 2cos^2 x$:

$$\frac{2(2\, sin\, x\, cos\, x)}{2cos\,^2 x} = \frac{4\, sin\, x\, cos\, x}{2cos^2 x}.$$

Скорочуємо на $2\, cos\, x$ і отримаємо:

$$\frac{2\, sin\, x}{cos\, x},$$

Оскільки $\frac{\sin\, x}{\cos\, x} = tg\, x$, маємо $\frac{2\sin\, x}{\cos\, x} = 2tg\, x$. Тотожність доведено.

Для підтвердження отриманого результату та формування навичок самоконтролю доцільно використати графічний метод перевірки тотожностей у середовищі GeoGebra.

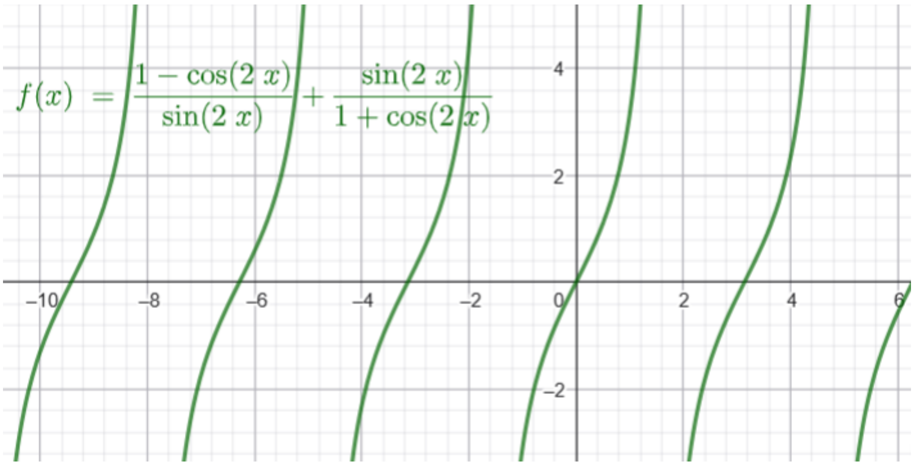

Рис. 17

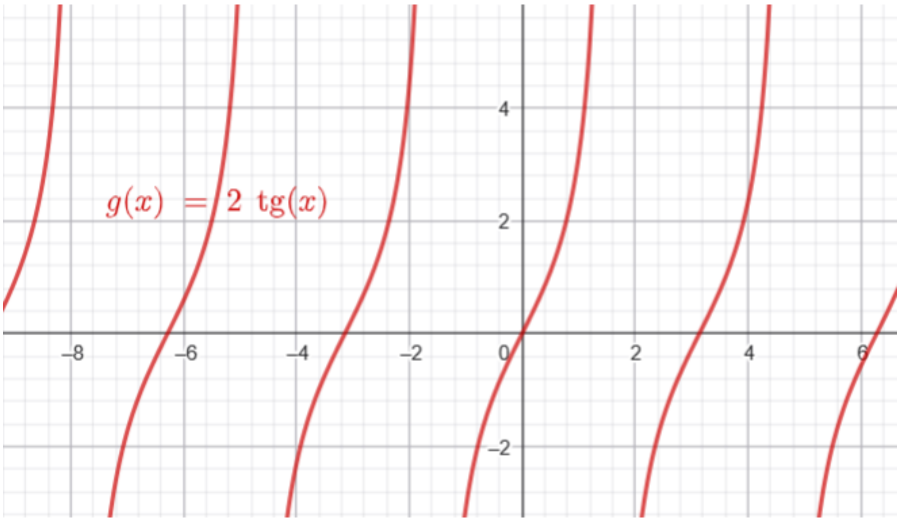

Рис. 18

Можемо спостерігати повне накладання (збіг) графіків функцій $f(x)$ та $g(x)$. Це є графічним доказом того, що вирази тотожно рівні на всій області визначення.

Приклад 2. Розв'язання рівнянь методом групування доданків та використання формул суми.

Розв'язати рівняння:

$$sin\,x + sin\,2x + sin\,3x = 0\ \ [2].$$

Розв'язання: Для того, щоб розкласти н множники, згрупуємо перший і третій доданок, оскільки півсума їхніх аргументів $\left(\frac{x+3x}{2} = 2x\right)$ дасть аргумент середнього доданка: $(sin\,x + sin\,3x) + sin\,2x = 0$.

Використовуємо формулу $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, в нашому випадку $\alpha = 3x, \beta = x$:

$$sin\,3x + sin\,x = 2\,sin\frac{3x+x}{2}cos\frac{3x-x}{2} = 2\,sin\,2x\,cos\,x,$$

підставимо це у початкове рівняння:

$$2\,sin\,2x\,cos\,x + sin\,2x = 0.$$

Бачимо спілиний множник $\sin 2x$, винесемо його за дужки:

$$sin\,2x(2\,cos\,x + 1) = 0.$$

Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, рівняння розпадається на два випадки:

І випадок: коли $sin\,2x = 0$, тоді

$$2x = \pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

ІІ випадок: коли $2\,cos\,x + 1 = 0$, тоді

$$2\cos x = -1,$$

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z,$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

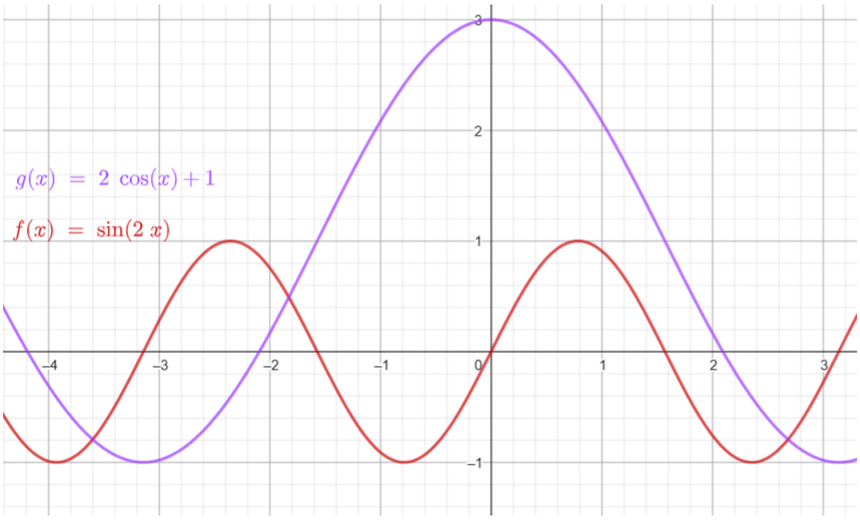

Рис. 19

Для перевірки аналітичного розрахунку та візуалізації методу розкладання на множники використовуємо середовище Geogebra. На координатній площині побудували два графіки: $f(x) = \sin 2x,\ g(x) = 2\cos x + 1$. Графічна інтеграція наочно демонструє, що множина коренів рівняння є об'єднанням нулів ци двох функцій (точок перетину графіків з віссю абсцис). Це допомагає візуально переконатися у правильності знайдених розв'язків.

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Приклад 3: Дослідження області значень функції та розв'язування рівняння з параметром.

Спростити вираз

$$f(x) = sin^4x + cos^4x,$$

та визначити, при яких значеннях параметр a рівняння $sin^4x + cos^4x = a$ має корені [9].

Розв'язання: Для перетворення суми четвертих степенів скористаємось алгебрачною тотожністю $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, де $a = sin^2x, b = cos^2x$.

$$f(x) = (sin^2x)^2 + (cos^2x)^2,$$

$$f(x) = (sin^2x + cos^2x)^2 - 2sin^2xcos^2x.$$

Застосувавши основну тригонометричну тотожність, $sin^2x + cos^2x = 1$, вираз спроститься:

$$f(x) = 1^2 - 2sin^2x\,cos^2x.$$

Використаємо формулу синуса подвійного кута, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Піднесемо цю рівність до квадрату:

$$sin^22x = 4sin^4xcos^2x \implies 2sin^2x\,cos^2x = \frac{1}{2}sin^22x.$$

Підставимо це у нашу функцію:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}sin^22x.$$

Виконуємо графіки двох функцій у програмі Geogebra та порівнюємо їх.

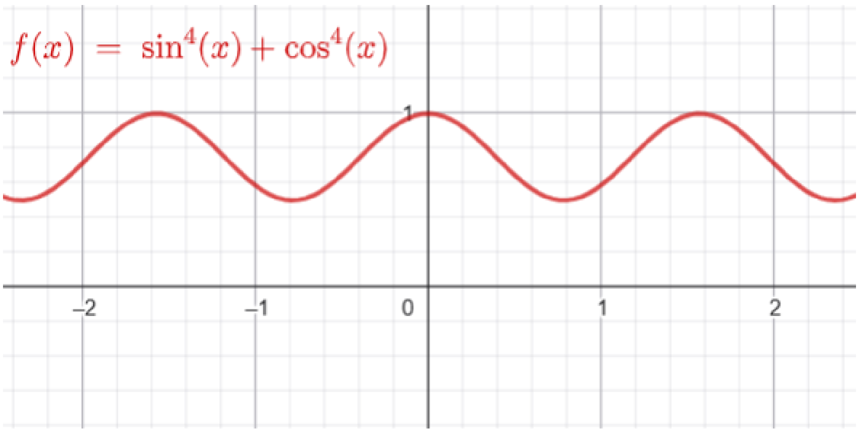

Рис. 20

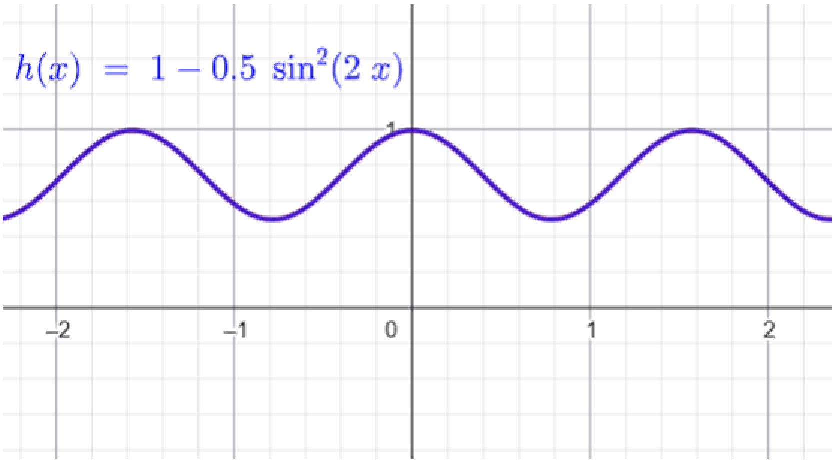

Рис. 21

Можемо помітити, що ці два графіки ідеально співподають один з одним і в прографі Geogebra це цітко видно. Це слугує миттєвою перевіркою правильності аналітичних перетворень.

налізуємо область значень $\mathrm{E}(f)$. Оцінюємо вираз, знаючи властивості синуса:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$0 \leq sin^2 2x \leq 1$$

Помножимо на $-\frac{1}{2}$ (знаки нерівності змінюємо):

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} sin^2 2x \leq 0$$

Додамо 1 до всі частин нерівності:

$$1 - \frac{1}{2} \leq 1 - sin^2 2x \leq 1$$

Отримаємо

$$\frac{1}{2} \leq 1 - sin^2 2x \leq 1,$$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1.$$

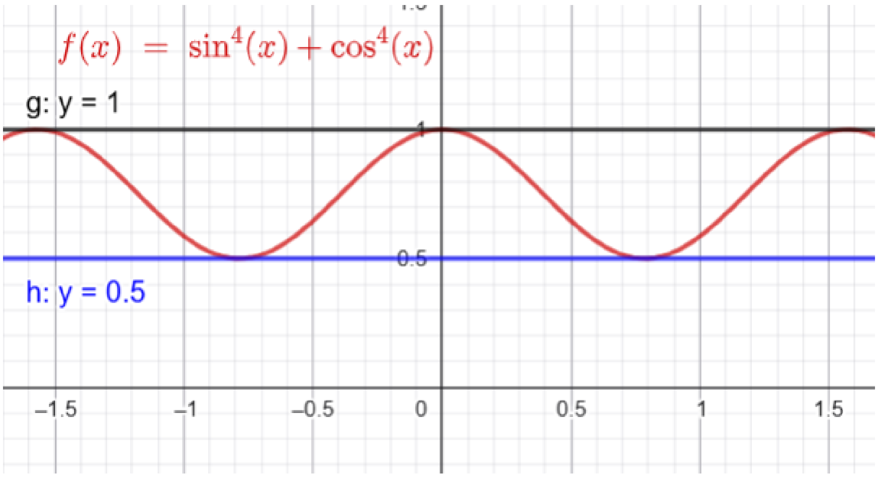

Рис. 22

На рис. 3 будуємо пряму $y = a$ і відносно її параметрів можемо зробити наступні висновки:

- Якщо $a < \frac{1}{2}$, то пряма проходитиме нижче графіка (точок перетину немає).
- Якщо $a = \frac{1}{2}$, то пряма торкається нижніх точок графіка (рівняння має розв'язки).
- Якщо $\frac{1}{2} < a < 1$, то пряма перетинає графік (рівняння має розв'язки).
- Якщо $a = 1$, то пряма торкається верніх точок графіка (рівняння має розв'язки).
- Якщо $a > 1$, то пряма проходить вище графіка (точок перетину немає).

Відповідь: Рівняння $sin^4x + cos^4x = a$ має корені тоді і тільки тоді, коли $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Використання прямої $y = a$ дозволяє сформувати і учнів стійке геометричне уявлення про поняття «області значень функці» та наочно розв'язати задачу з параметром, яка в аналітичному вигляді часно викликає труднощі.

ВИСНОВОК

Магістерська робота присвячена дослідженню методики навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових освітніх технологій, обґрунтуванню ефективності їх інтеграції в навчальний процес сучасної школи та визначенню педагогічних умов, які забезпечують оптимальне засвоєння матеріалу учнями. Аналіз теоретичних, методичних та практичних аспектів показав, що цифрові технології мають високий потенціал для підвищення результативності уроків математики, розвитку дослідницьких та аналітичних компетентностей учнів, а також формування сучасних цифрових навичок.

У розділі 1 було розглянуто теоретичні основи навчання тригонометричних функцій, визначено значення та особливості вивчення цього розділу шкільного курсу математики. Психолого-педагогічні та методичні засади показали, що для ефективного засвоєння понять тригонометрії необхідне поетапне формування уявлень, наочне моделювання і систематичне закріплення матеріалу. Особлива увага приділялася ролі цифрових освітніх технологій, які дозволяють створювати інтерактивне навчальне середовище, моделювати графіки функцій, проводити дослідження та експерименти, що сприяє глибшому розумінню закономірностей тригонометрії. Цей розділ довів, що теоретичне обґрунтування використання цифрових ресурсів є необхідною умовою для ефективної інтеграції технологій у навчання.

Розділ 2 присвячено методиці навчання тригонометричних функцій із використанням цифрових інструментів. Було визначено основні принципи побудови методики, які враховують як традиційні педагогічні підходи, так і сучасні цифрові технології. Розглянуто форми і методи роботи з використанням цифрових платформ, представлені приклади уроків, інтерактивні вправи та завдання для самостійної роботи. Аналіз уроків показав, що цифрові інструменти сприяють активному залученню учнів, розвитку їхніх дослідницьких та аналітичних навичок, дозволяють здійснювати моделювання функцій і спостереження за зміною графіків у режимі реального часу. Поєднання роботи з інтерактивними моделями та класичних методів навчання забезпечує системність, поступовість та глибину засвоєння матеріалу, а також формує у учнів уміння робити обґрунтовані висновки та застосовувати знання у практичних і теоретичних ситуаціях.

У розділі 3 було розглянуто особливості інтеграції цифрових технологій у навчання тригонометричних функцій, визначено переваги та потенційні труднощі їх використання, а також запропоновано практичні рекомендації для педагогів. Було встановлено, що цифрові інструменти значно підвищують наочність та доступність матеріалу, створюють умови для дослідницької діяльності, забезпечують оперативний зворотний зв'язок та дозволяють диференціювати завдання відповідно до індивідуальних потреб учнів. Водночас ефективність їх застосування залежить від наявності технічних ресурсів, цифрової компетентності вчителя та методичної підготовки. Практичні рекомендації включають поетапну організацію уроку, моделювання функцій, систематизацію результатів досліджень, обговорення висновків та інтерактивні вправи для закріплення знань.

На основі проведеного дослідження можна виділити основні результати та висновки:

1. Цифрові технології підвищують мотивацію та активність учнів, створюючи інтерактивне навчальне середовище, де учень стає активним дослідником, а не пасивним спостерігачем.
2. Інтеграція цифрових інструментів сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення, навичок дослідницької діяльності, формує здатність робити обґрунтовані висновки та моделювати функціональні залежності.
3. Методично продумана послідовність уроків, поєднання традиційних і цифрових методів навчання, забезпечують глибоке засвоєння тригонометричних понять та підвищують ефективність навчального процесу.
4. Цифрові технології дозволяють диференціювати навчання, враховуючи індивідуальні особливості учнів, контролювати прогрес та організовувати зворотний зв'язок у режимі реального часу.

5. Розроблені методичні рекомендації та приклади уроків можуть слугувати орієнтиром для вчителів, які прагнуть підвищити результативність уроків математики та впровадити інноваційні цифрові ресурси у навчальний процес.

Отже, дослідження підтверджує, що використання цифрових технологій у навчанні тригонометричних функцій є обґрунтованим, доцільним і перспективним напрямом сучасної математичної освіти. Інтеграція цифрових інструментів у традиційну структуру уроку дозволяє підвищити результативність навчання, сформувати компетентності XXI століття, забезпечити активну пізнавальну діяльність учнів та підготувати їх до самостійного застосування знань у практичних і дослідницьких завданнях.

Таким чином, магістерська робота довела, що комплексний підхід до навчання тригонометричних функцій із застосуванням цифрових технологій забезпечує ефективне, послідовне та інтерактивне навчання, що відповідає сучасним педагогічним вимогам та сприяє розвитку ключових компетентностей учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Методика навчання математики в школі. Київ : ВЦ «Академія», 2018. 320 с.

2. Богач М. М. Навчальний посібник з математики «Тригонометрія». 10 клас. URI: https://naurok.com.ua/navchalniy-posibnik-z-matematiki-trigonometriya-124007.html

3. Бурда М. І., Колягін Ю. М. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10–11 класів. Київ: Освіта, 2010. 368 с.

4. Гриневич Т. О. Тригонометрія в навколишньому світі і в житті людини // У: Пометун О., Пироженко Л. (уклад.). Інтерактивні технології навчання: теорія, досвід. Київ, 2004. 225 с.

5. Державний стандарт базової середньої освіти. Затверджено постановою КМУ від 30.09.2020 № 898. Київ, 2020. 48 с.

6. Жалдак М. І. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання: математика, інформатика. Київ: НПУ, 2013. 264 с.

7. Завадський І. О. Електронні освітні ресурси у навчанні математики. Тернопіль: ТНПУ, 2018. 192 с.

8. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу. Київ: Генеза, 2021. 256 с.

9. Каплун О. О., Іляшенко Т. А., Тарасенкова І. О. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 класу. Київ: Ранок, 2019. 288 с.

10. Коломієць О. М. Методика навчання математики: теорія і практика. Київ: НПУ ім. Драгоманова, 2018. 304 с.

11. Кузнецова В. М. Методика навчання алгебри і початків аналізу в старшій школі. Харків: Основа, 2017. 256 с.

12. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. Інноваційні методи навчання математики. Кропивницький, 2015. 220 с.

13. Лосєва Н. М. Інтерактивні методи навчання математики // Вісник ВНТУ, 2011. 12–20 с.

14. Мельник І. В. Психолого-педагогічні основи навчання математики в старшій школі. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2020. 272 с.

15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу. Харків: Гімназія, 2021. 248 с.

16. Морзе Н. В., Барна О. В. Цифрова компетентність учителя. Київ: Київський університет ім. Б. Грінченка, 2019. 196 с.

17. Онопрієнко О. В., Слєпкань З. І. Технології навчання математики: навчально-методичний посібник. Київ: Вища школа, 2010. 288 с.

18. Оласюк О. І., Невірець О. С. Інтерактивні методи викладання математики // XVI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи дослідження», Луцьк, 17 трав. 2022. Луцьк, 2022. 1063 с.

19. Оласюк О. І. Інтегровані уроки математики // Всеукраїнська інтернет-конференція «Методологічні та математичні аспекти навчання в освітньому процесі НУШ», Луцьк, 15 черв. 2023. Луцьк: ВІППО, 2023. 22с .

20. Оласюк О. І. Інтерактивні методи та цифрові інструменти у викладанні тригонометрії в сучасній школі // XX Міжнародна конференція імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 17–22 листоп. 2025. Київ, 2025. 253 с.

21. Пометун О. І., Пироженко Л. А. Інтерактивні технології навчання: теорія та практика. Київ: АПН України, 2002. 288 с.

22. Поліщук В. М. Вікова і педагогічна психологія. Суми: Університетська книга, 2010. 224 с.

23. Приходько Ю. О., Юрченко В. І. Психологічний словник-довідник. Київ: Каравела, 2020. 416 с.

24. Руденко Р. А. Педагогічна психологія. Київ: КНУБА, 2023. 352 с.

25. Скворцова С. О. Сучасні підходи до навчання математики в умовах компетентнісної освіти. Одеса: Університет Ушинського, 2019. 180 с.

26. Скрипченко О. В., Долинська Л. В., Огороднійчук З. В. та ін. Вікова та педагогічна психологія. Київ: Каравела, 2019. 376 с.

27. Скляренко В. К. Методика навчання математики в середній школі. Київ: Вища школа, 2005. 288 с.

28. Тарасенкова І. О., Богатирьова І. О., Акуленко І. О. Методика навчання математики: навчальний посібник. Київ: Світтич, 2020. 272 с.

29. Топчій В. В. Теорія і методика навчання математики: навчальний посібник. Харків: Основа, 2016. 256 с.

30. Типові освітні програми з математики (5–11 класи) / під керівн. О. Істера, Г. Бевз, І. Тарасенкової. Київ: ОРІОН, 2021. 160 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

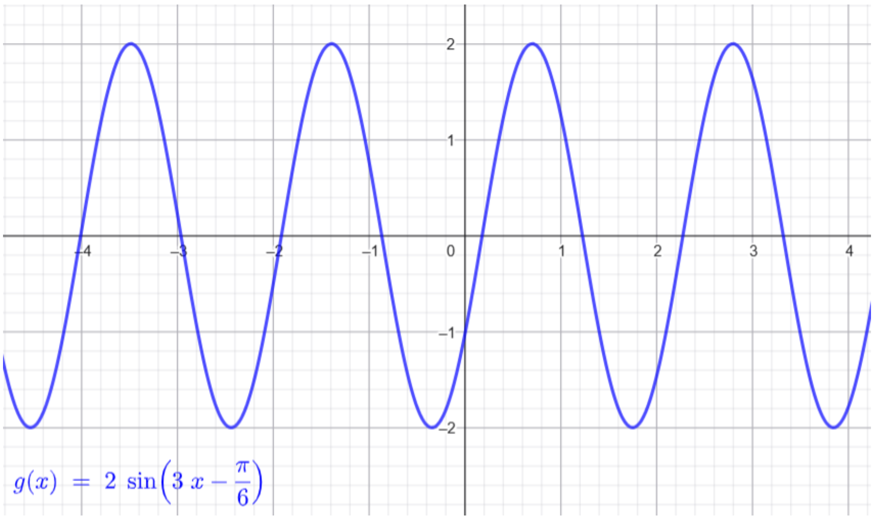

Рис. 1

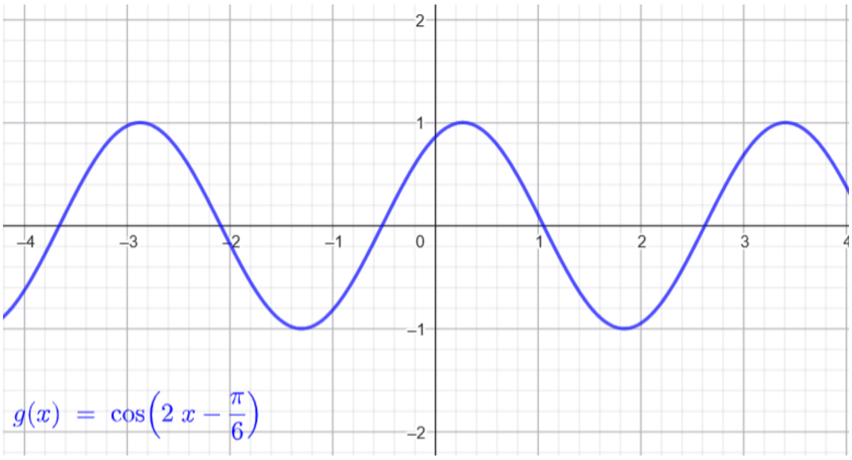

Рис. 2

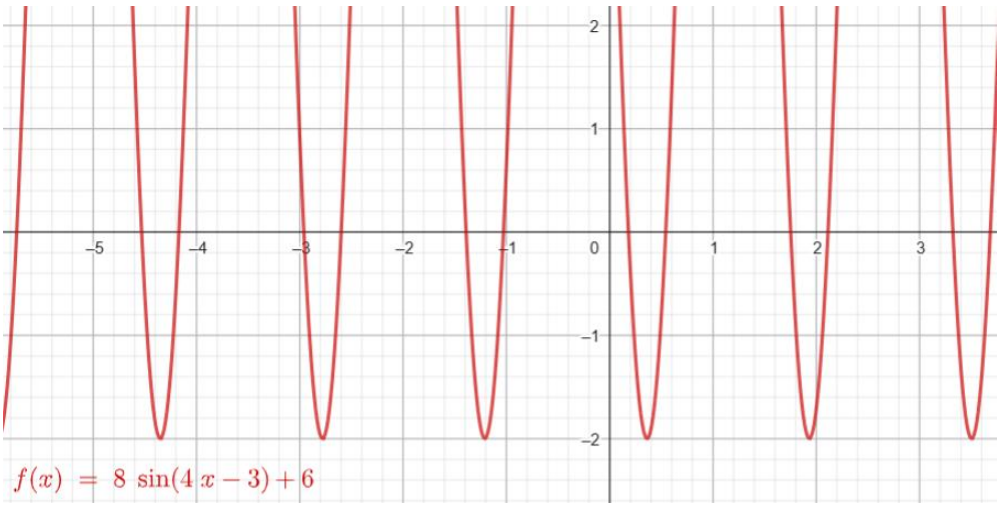

Рис. 3

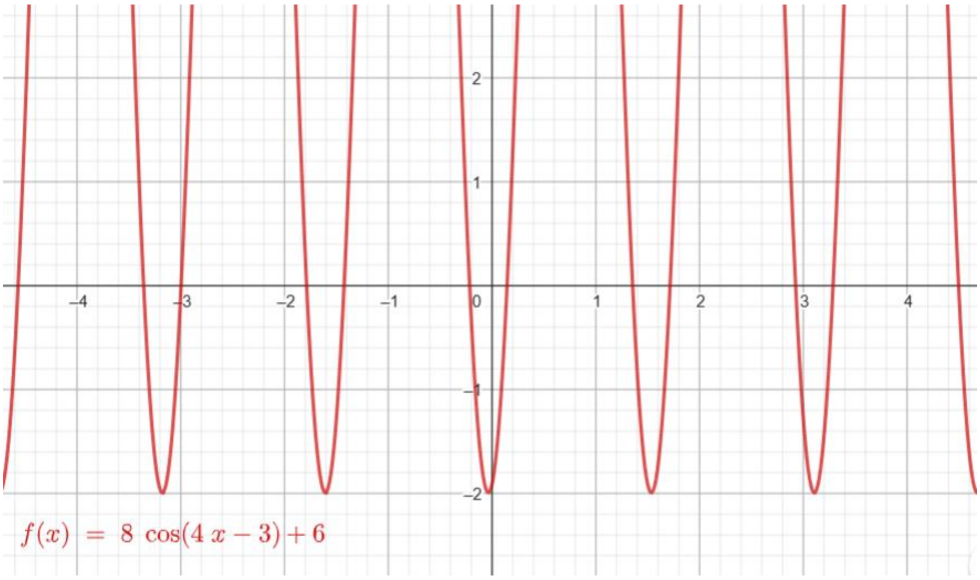

Рис. 4

Додаток Б

Приклад 1. Урок на тему «Побудова графіка функції $y = sin\,x$» із використанням інтерактивної дошки та GeoGebra.

Мета:

- сформувати в учнів уявлення про графік функції $y = sin\,x$;
- навчити будувати графік синусоїди на основі таблиці значень і за допомогою GeoGebra;
- розвивати вміння спостерігати, робити висновки, працювати в групі та користуватися цифровими засобами навчання.

Хід уроку:

І. Організаційний момент (2 хв.)

Учитель: Доброго дня, діти! Сьогодні у нас незвичайний урок — ми будемо досліджувати тригонометричну функцію синуса за допомогою комп'ютерної програми GeoGebra.

Учитель: Перевіримо готовність до роботи: чи всі мають зошити, ручки, калькулятори?

Коротке налаштування на роботу. Створюється позитивний емоційний настрій у класі.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв.)

Учитель: Пригадайте, що таке синус кута. Як його можна знайти за одиничним колом?

Учні відповідають, формулюють визначення.

Учитель: Пригадаємо значення синуса для деяких кутів — 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

(Записує таблицю на дошці. Учні відповідають.)

Учитель: Добре. Сьогодні ми побачимо, як змінюється синус кута при збільшенні аргументу й як це можна побачити на графіку.

III. Мотивація навчальної діяльності (3 хв.)

Учитель: Ми часто говоримо про синус і косинус у формулах. Але чи замислювались ви, як виглядає функція синуса?

Показує приклади з життя: хвилі, коливання маятника, звук.

Учитель: Ці явища мають одну спільну закономірність — синусоїдальну. Саме таку форму має графік функції $y = sin\ x$. Сьогодні побачимо це наочно.

IV. Вивчення нового матеріалу (15 хв.)

Учитель: Відкриваю програму GeoGebra. Подивіться на екран — це одиничне коло. Коли точка рухається по колу, її координата по вертикалі — це значення синуса.

Учитель поступово змінює кут і показує, як змінюється значення $sin\ x$.

Учитель: Зробимо таблицю значень функції $y = sin\ x$ для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 270°, 360°. Називайте значення, я їх запишу.

(Учні називають значення, учитель записує на інтерактивній дошці.)

Учитель: А тепер нанесемо ці точки на координатну площину.

(Будує точки, з’єднує їх плавною лінією.)

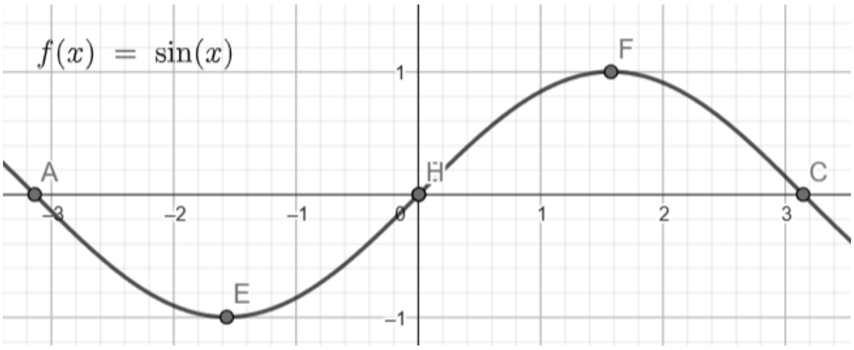

Рис. 5

Учитель: Подивіться — ми отримали графік, який має хвилясту форму. Це — синусоїда. Вона повторюється через кожні 360°, має максимум 1 і мінімум −1.

Далі учитель демонструє, як змінюється графік, якщо у формулі змінити параметри.

Учитель: Введу рівняння $y = 2sin\ x$. Що спостерігаєте?

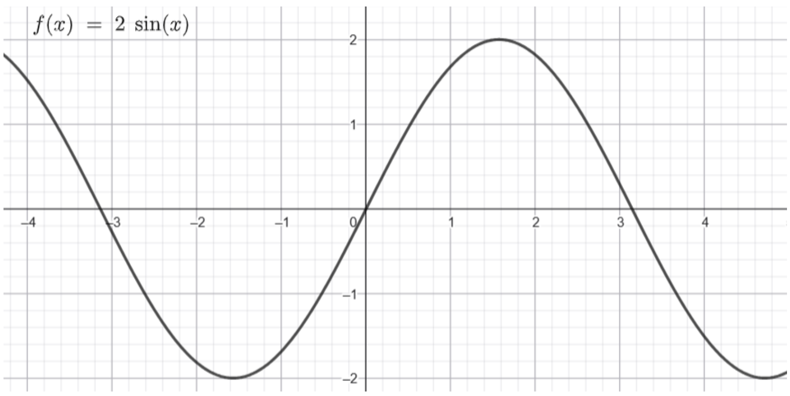

Рис. 5

Учні: Графік став вищим.

Учитель: Отже, коефіцієнт 2 збільшує амплітуду.

Учитель: А тепер змінимо рівняння на $y = sin(2x)$.

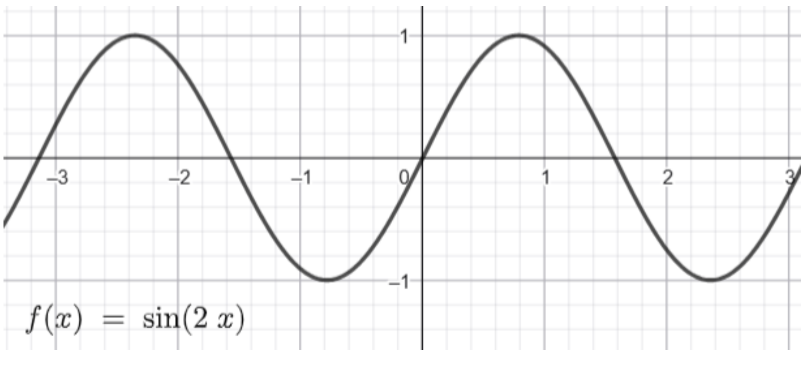

Рис. 7

Учні: Графік став частішим.

Учитель: Так, змінився період — функція повторюється частіше.

Учитель підсумовує спостереження: коефіцієнт перед синусом впливає на висоту графіка (амплітуду), а коефіцієнт біля x — на частоту коливань (період).

V. Формування умінь і навичок (15 хв.)

Учитель: А тепер спробуємо самостійно. Я розділю вас на групи. Кожна отримає одне рівняння для побудови в GeoGebra: $y = 0.5\, sin\, x$; $y = 2\, sin\, x$; $y = sin(2x)$; $y = sin(x + 45°)$.

Кожна група будує свій графік і пояснює, як змінилась форма кривої.

Учні працюють біля дошки або за власними пристроями. Після виконання завдання коротко презентують результати.

Учитель: Молодці. Ви помітили, що лише невеликі зміни у формулі створюють зовсім інший графік.

VI. Підбиття підсумків уроку (5 хв.)

Учитель: Отже, сьогодні ми дізналися, як виглядає графік функції $y = sin\, x$, і побачили, як параметри рівняння впливають на його форму.

Бесіда з класом:

- Що означає амплітуда графіка?
- Що визначає період функції?
- Як впливає коефіцієнт перед x на вигляд графіка?

Учні відповідають.

Учитель: Молодці! Ви сьогодні не просто побачили формулу, а створили її графік власноруч.

VII. Домашнє завдання (3 хв.)

Побудувати в GeoGebra або у зошиті графік функцій: $y = cos\, x$, $y = sin\, x$. Порівняти їх і записати спільні та відмінні риси.

Додаток В

Приклад 2. Урок на тему «Дослідження графіка функції $y = cos\, x$ та її перетворень»

Мета:

- Поглибити знання учнів про графік функції $y = cos\,x$;
- Навчити будувати та досліджувати графіки функції $y = cos\,x$ із різними параметрами за допомогою GeoGebra;
- Розвивати навички дослідження функцій, аналітичного мислення та роботи в команді;
- Ознайомити з застосуванням цифрових інструментів для моделювання та аналізу математичних залежностей.

Хід уроку

I. Організаційний момент (2 хв.)

Учитель: Доброго дня, діти! Сьогодні на уроці ми будемо досліджувати графік функції $y = cos\,x$ і навчимося працювати з її модифікаціями у програмі GeoGebra.

Перевірка готовності класу до роботи: чи всі мають зошити, ручки, ноутбуки або планшети; налаштування на плідну роботу та створення позитивної атмосфери.

II. Актуалізація опорних знань (5 хв.)

Учитель: Пригадайте визначення косинуса та його значення для ключових кутів: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Учні відповідають та записують таблицю значень.

Учитель: Подивімося, як значення косинуса змінюються при зміні кута, і як це виглядає на графіку.

III. Мотивація навчальної діяльності (3 хв.)

Учитель: Графік функції $y = cos\,x$ часто використовується у фізиці, інженерії та техніці — хвилі, коливання маятника, електричні сигнали.

Показ коротких прикладів із життя, що демонструє реальні процеси, які повторюють косинусоїдальну форму.

Учитель відкриває GeoGebra та демонструє одиничне коло.

Учитель: Координата точки по вертикалі при русі по колу — це значення $cos\,x$.

Учні спостерігають за рухом точки та фіксують зміни значення функції.

Створюється таблиця значень $y = cos\,x$ для кутів $0°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 150°,\ 180°,\ 270°,\ 360°$.

Будуються точки на координатній площині, з'єднуються лінією, отримується графік косинусоїди.

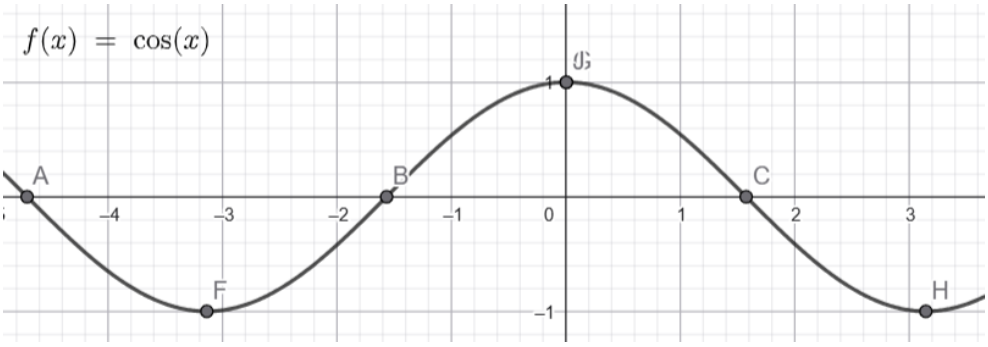

Рис. 8

Демонстрація впливу параметрів на графік:

- $y = 2\,cos\,x$ → збільшення амплітуди;

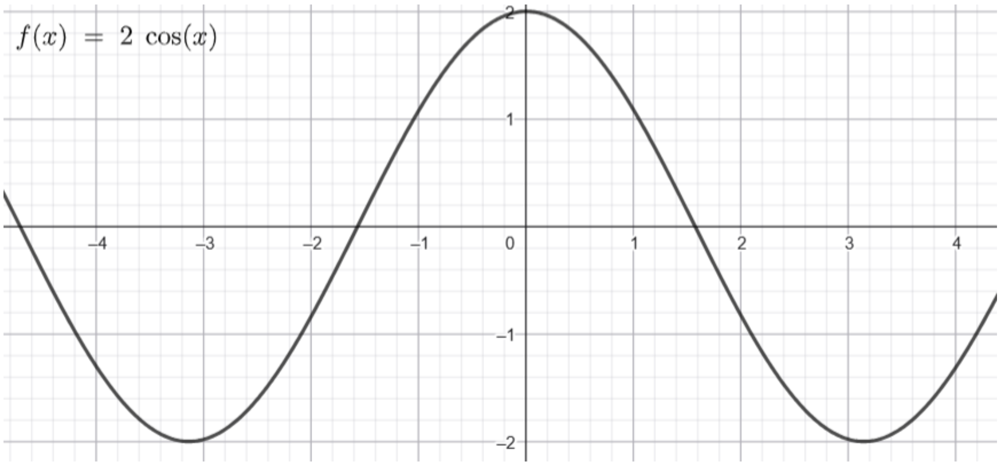

Рис. 9

- $y = cos(0.5x)$ → збільшення періоду;

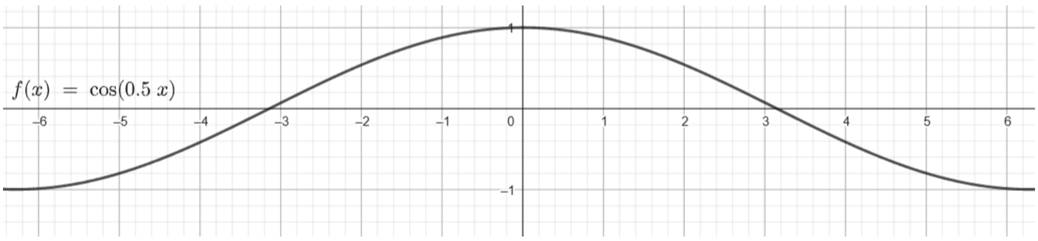

Рис. 10

- $y = cos(x + 45°)$ → фазовий зсув.

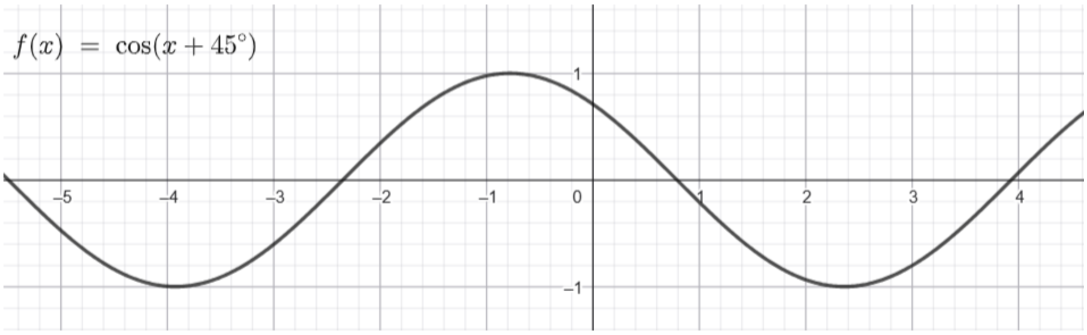

Рис. 11

Учитель обговорює з учнями вплив кожного параметра на графік та формує висновки.

V. Формування умінь і навичок (15 хв.)

Учні поділяються на групи. Кожна група отримує завдання дослідити свій варіант функції:

- $y = 0.5 \, cos \, x$;
- $y = 3 \, cos \, x$;
- $y = cos(2x)$;
- $y = cos(x - 60°)$.

Учні будують графіки у GeoGebra, аналізують, обговорюють зміни амплітуди, періоду та фазового зсуву.

Після виконання завдання групи коротко презентують результати класу, демонструють графіки та пояснюють спостереження. Після чого учні виконують завдання із підручника.

VI. Підбиття підсумків уроку (5 хв.)

Учитель: Сьогодні ми дізналися, як виглядає графік функції $y = cos \, x$ та як параметри рівняння впливають на його форму.

Обговорюються ключові питання:

- Що таке амплітуда графіка?
- Як визначається період функції?
- Як змінює графік фазовий зсув?

Учитель узагальнює спостереження та підкреслює практичне значення отриманих знань.

VII. Домашнє завдання (3 хв.)

1. Побудувати графіки функцій $y = sin\, x, y = cos\, x$ та $y = sin(x + 30°)$ у GeoGebra або зошиті;

2. Порівняти графіки та описати вплив параметрів на амплітуду, період та зсув графіків;

3. Підготувати короткі висновки для обговорення на наступному уроці.

Додаток Г

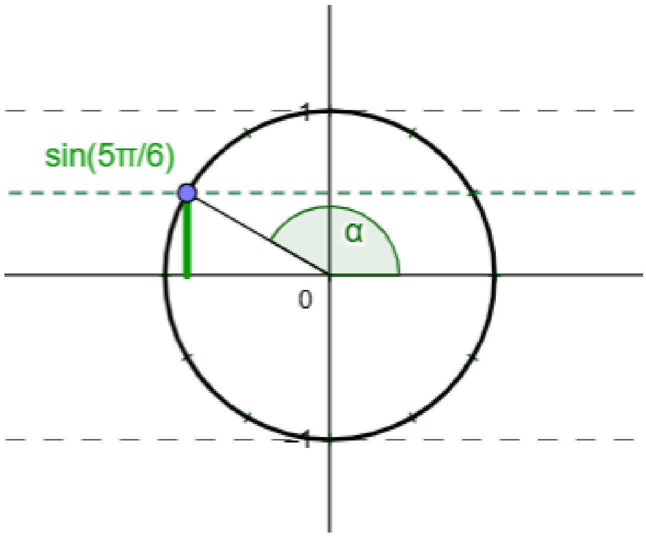

Рис. 12

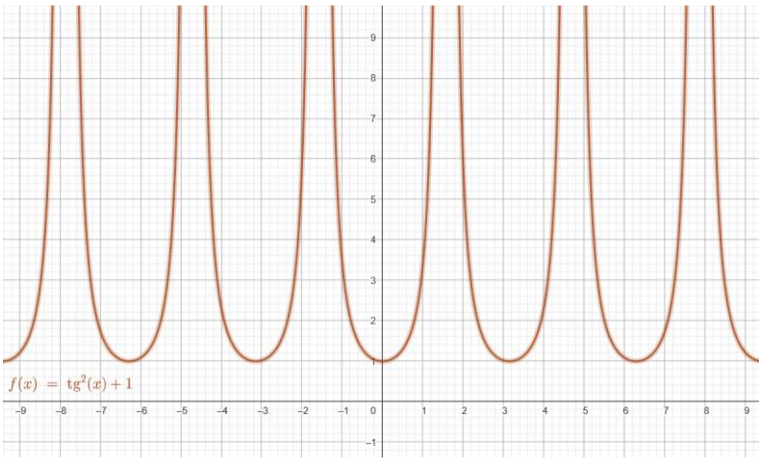

Рис. 13

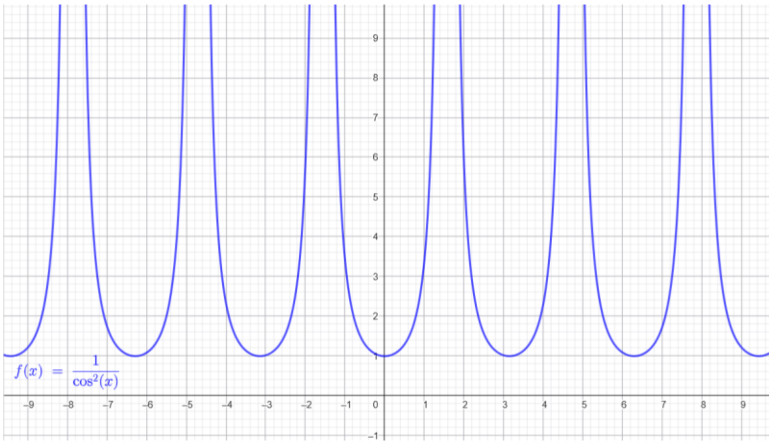

Рис. 14

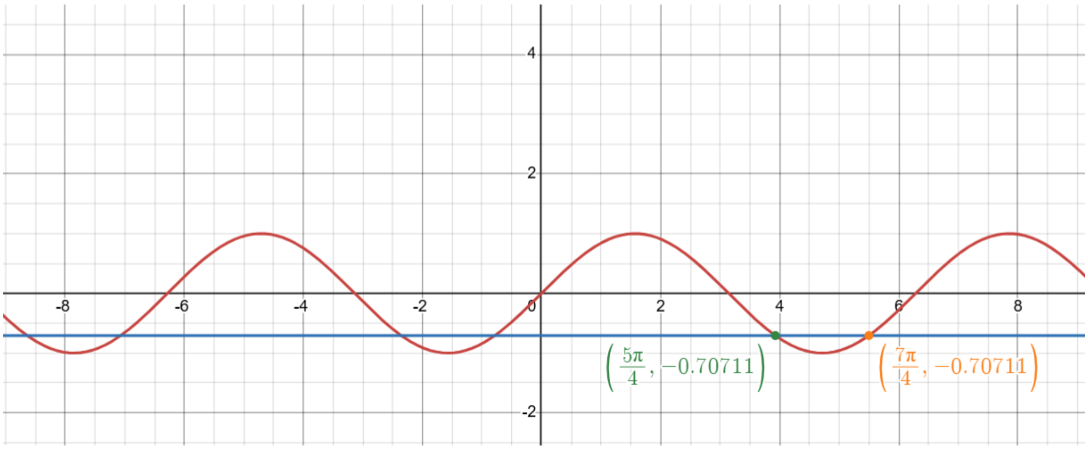

Рис. 15

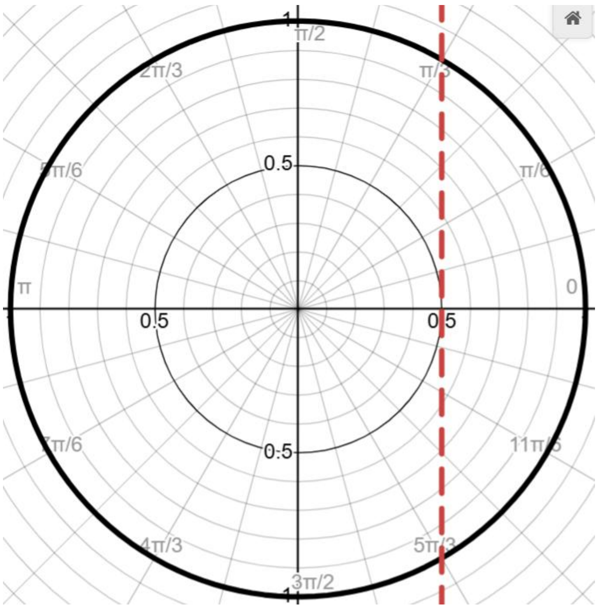

Рис. 16

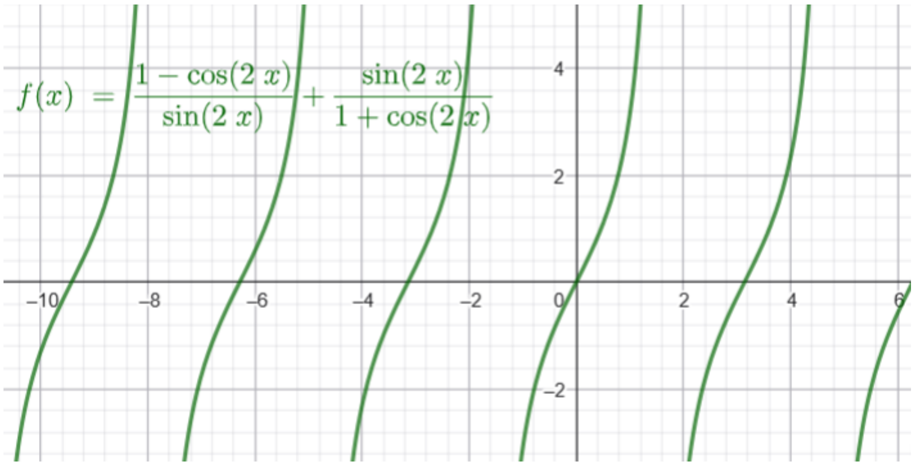

Рис. 17

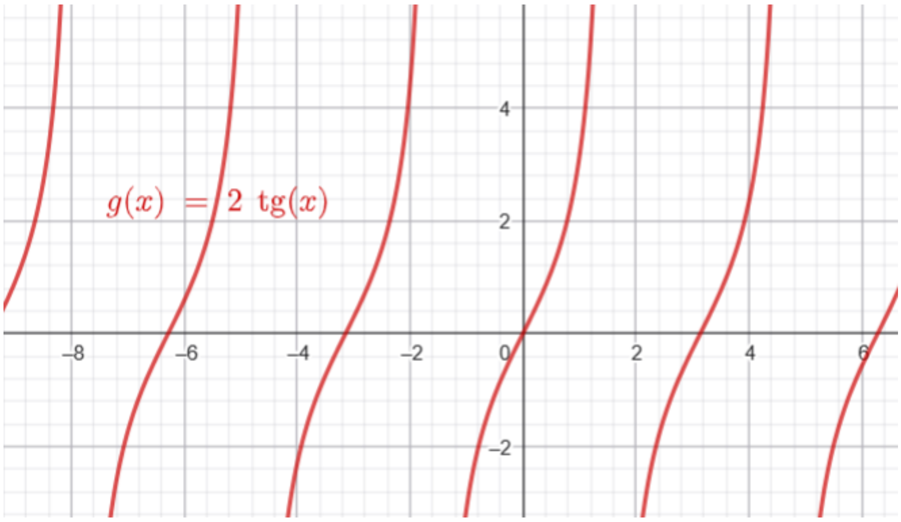

Рис. 18

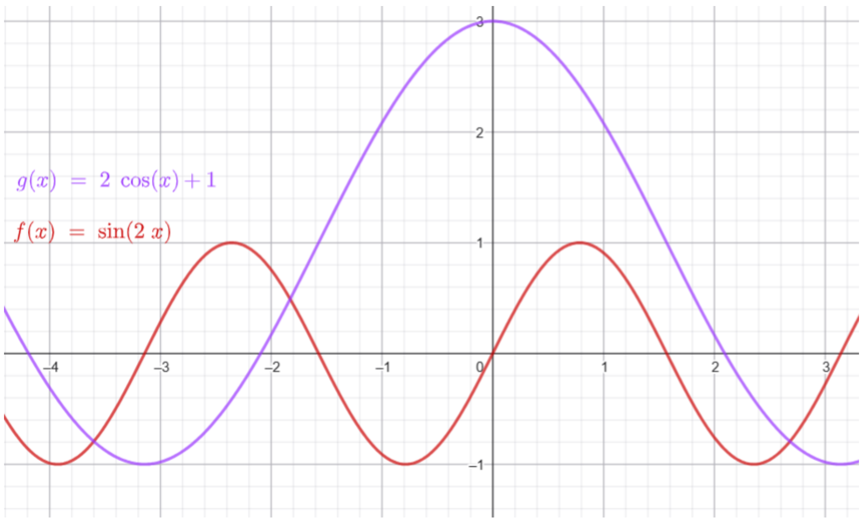

Рис. 19

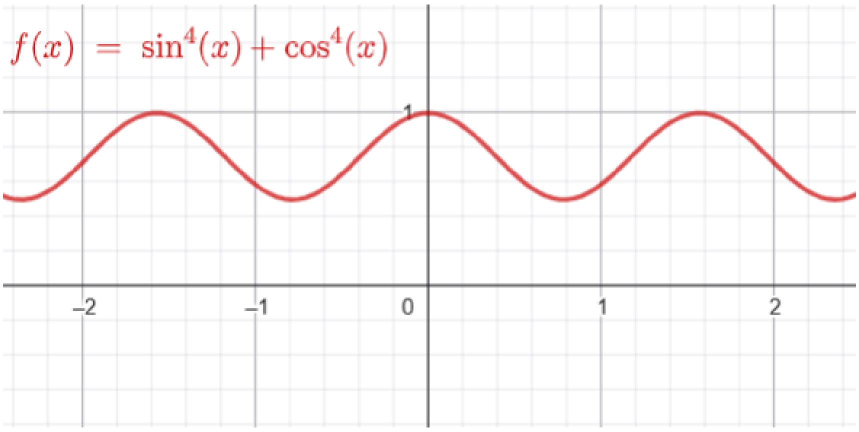

Рис. 20

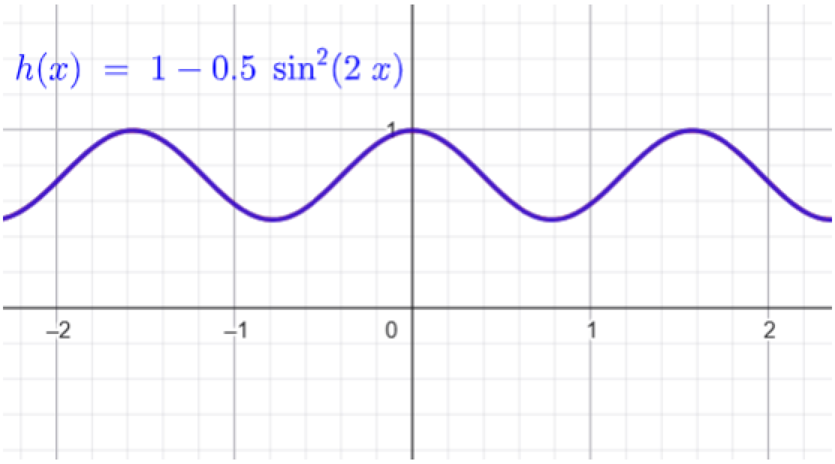

Рис. 21

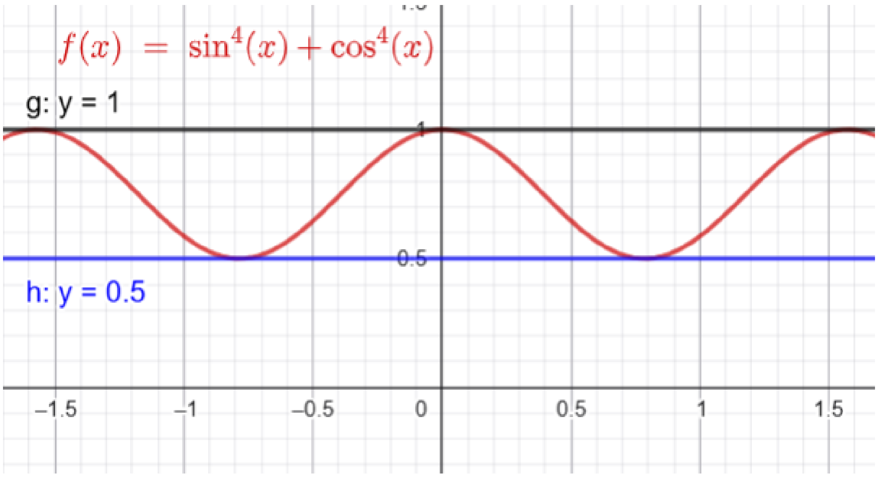

Рис. 22

АНОТАЦІЯ

Оласюк О. І. Методика навчання тригонометричних функціій із використанням цифрови освітніх технологій. Магістерська робота за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) – Луцьк, 2025 – 80 с.

У магістерській роботі проаналізовано теоретичні засоби вивчення тригонометричних функцій у шкільному курсі математики та обґрунтовано значення цифрових освітніх технологій у формуванні глибокого розуміння тригонометричних понять. Досліджено психолого-педагогічні особливості засвоєння тригонометричного матеріалу, виявлено типові труднощі учнів та визначено їх причини. Розкрито можливості сучасних цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos, PhET тощо) для візуалізації, моделювання, дослідження властивостей тригонометричних функцій та організації інтерактивної діяльності. Обґрунтовано методичні підходи до реалізації цифрових технологій у навчанні тригонометрії, визначено педагогічні умови, що забезпечують підвищення ефективності засвоєння матеріалу учнями. Розроблено та апробовано фрагменти уроків, інтерактивні вправи й завдання з використанням цифрових інструментів, спрямовані на розвиток дослідницьких умінь, формування візуального мислення та підсилення мотивації до вивчення тригонометрії.

Практичне значення роботи полягає у створенні методичних рекомендацій щодо інтеграції цифрових освітніх технологій у процес навчання тригонометричних функцій. Запропоновані напрацювання можуть бути використані вчителями математики закладів загальної середньої освіти для підвищення ефективності навчального процесу, оптимізації структури уроків та урізноманітнення видів пізнавальної діяльності. Матеріали дослідження також можуть бути застосовані під час підготовки майбутніх учителів математики у закладах вищої освіти.

Ключові слова: ***тригонометричні функції, цифрові освітні технології, GeoGebra, Desmos, інтерактивні вправи, методика навчання.***

ABSTRACT

Olasiuk O. I. Methodology of Teaching Trigonometric Functions Using Digital Educational Technologies. Master's Thesis, Specialty 014 Secondary Education (Mathematics). – Lutsk, 2025. – 80 p.

The master's thesis analyzes the theoretical foundations of studying trigonometric functions in the school mathematics curriculum and substantiates the importance of digital educational technologies in forming a deep understanding of trigonometric concepts. The psychological and pedagogical features of mastering trigonometric material are investigated, typical students' difficulties are identified, and their causes are determined. The potential of modern digital tools (GeoGebra, Desmos, PhET, etc.) for visualization, modeling, exploration of the properties of trigonometric functions, and organization of interactive activities is revealed. Methodological approaches to the implementation of digital technologies in teaching trigonometry are substantiated, and the pedagogical conditions ensuring increased efficiency of material mastery by students are defined. Lesson fragments, interactive exercises, and tasks using digital tools aimed at developing research skills, forming visual thinking, and enhancing motivation to study trigonometry have been developed and tested.

The practical significance of the work lies in the creation of methodological recommendations regarding the integration of digital educational technologies into the process of teaching trigonometric functions. The proposed developments can be used by mathematics teachers in general secondary education institutions to improve the efficiency of the educational process, optimize lesson structures, and diversify types of cognitive activity. The research materials can also be applied during the training of future mathematics teachers in higher education institutions.

Keywords: ***trigonometric functions, digital educational technologies, GeoGebra, Desmos, interactive exercises, teaching methodology.***