МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

ЖИГАЛЛО МАКСИМ КОСТЯНТИНОВИЧ

АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ W^2 ТА W^3 ГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ХАРКЕВИЧ ЮРІЙ ІЛІОДОРОВИЧ

кандидат фіз.-мат. наук, професор

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № ________

Засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від __________ 2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Гембарська С. Б. ________

Луцьк – 2025

Зміст

Перелік умовних позначень

N — множина натуральних чисел

R — множина дійсних чисел

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{x\in R}|f(x)|$

L — простір 2π-періодичних сумовних функцій з нормою $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$

W^r — клас Соболєва: множина 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно, $r \in N$, та $ess\sup\limits_{x\in R}\left|f^{(r)}(x)\right| \leq 1$

$A_\rho(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right\}dt$, де $0 \leq \rho < 1$, $f \in L$ — гармонійний інтеграл Пуассона функції f

$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, A_\rho)_X = \sup\limits_{f\in\mathfrak{N}}\|f(\cdot) - A_\rho(f,\cdot)\|_X$ — верхня межа відхилення функцій з класу $\mathfrak{N}$ від їх гармонійних інтегралів Пуассона в нормі простору X

$K_n = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, ...$ — константи Н.І. Ахієзера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара

$\tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}$, $n \in N$ — константи Н.І. Ахієзера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара

Вступ

У даній роботі вивчаються асимптотичні розклади верхніх меж наближень функцій з класів Соболєва W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона.

Актуальність теми. На теперішній час у галузі теорії апроксимації розроблено багато методів наближення тригонометричними поліномами у просторах періодичних функцій. Серед лінійних методів слід виділити такі, що визначаються числовими матрицями (методи Фейєра, Валле-Пуссена, Зигмунда, Рогозинського, Рісса, Коровкіна, тощо) і такі, що визначаються множиною функцій (методи наближення гармонійними інтегралами Пуассона).

Апроксимативні властивості методу наближення гармонійними інтегралами Пуассона $A_\rho(f, x)$ на класах Соболєва W^r, $r \in N$ досліджувались в роботах багатьох математиків: В.П. Натансона, О.П. Тімана, Б. Надя, Е.Л. Штарка, В.О. Баскакова, Л.П. Фалалеєва та інших. Ними були отримані точні (при $0 \le \rho < 1$) рівності для величин

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = \sup_{f \in W^r} \left\| f\left(x\right) - A_\rho\left(f, x\right) \right\|_C$$

для довільного $r \in N$, а також асимптотичний розклад цієї величини при $r = 1$. Зокрема, Е.Л. Штарк знайшов асимптотичний розклад характеристики $\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C$ при $\rho \to 1-$, що дозволяє виписувати константи, які відповідають асимптотичним доданкам будь-якої степені малості.

В той же час, питання про знаходження асимптотичних розкладів апроксимативних характеристик $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ при $r \geq 2$ та $\rho \to 1-$ на даний час є менш висвітленим. Зокрема, не було окремо виписаних таких розкладів для класів W^2 та W^3.

Об'єктом дослідження є апроксимативні властивості методу наближення періодичних функцій гармонійними інтегралами Пуассона

$$A_\rho(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\right\}dt,\ 0 \leq \rho < 1,\ f \in L.$$

Предметом дослідження є асимптотична поведінка верхніх меж наближень функцій з класів W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона при $\rho \to 1-$.

Мета роботи. Виписати асимптотичні розклади величин $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ при $r = 2, 3$ та $\rho \to 1-$, а також виписати точні значення цих величин при $0 \leq \rho < 1$.

Методи дослідження. У роботі застосовуються загальні методи математичного аналізу у поєднанні із спеціальними методами теорії наближення функцій, що розвинені у роботах О.І. Степанця, О.П. Тімана, Е.Л. Штарка. Зокрема, при знаходженні асимптотичних розкладів використовується техніка, що розроблена Е.Л. Штарком для побудови асимптотичного розкладу величини $\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C$, в поєднанні з методами, розробленими О.П. Тіманом для знаходження точних значень величин $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$.

Наукова новизна результатів. В даній магістерській роботі окремо виписані асимптотичні розклади для величин $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ при $r = 2, 3$ та $\rho \to 1-$, що узагальнюють відомий результат Е.Л. Штарка для класу W^1.

Практичне значення результатів. Результати роботи носять теоретичний характер. Вони, а також методика їх отримання, можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій. Зокрема, розроблений спосіб відшукання асимптотичних розкладів величин $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ може бути використаний для інших значень r та інших лінійних методів наближення.

Структура роботи. Робота складається з переліку умовних позначень, вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Перший розділ носить оглядовий характер. В ньому проводиться огляд літератури, висвітлюються основні аспекти розвитку наукової думки у напрямку наближення диференційовних функцій лінійними методами та, зокрема, гармонійними інтегралами Пуассона.

Другий розділ присвячений дослідженню наближення функцій класів W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона. Основна увага приділяється знаходженню асимптотичних розкладів верхніх меж наближень при $\rho \to 1-$ та точних значень при $0 \leq \rho < 1$.

У підрозділі 2.1 формулюється задача, наводяться необхідні позначення та означення асимптотичного розкладу.

У підрозділі 2.2 виписані асимптотичні розклади верхніх меж наближення функцій класів W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона.

Основним твердженням цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 2.1. *Мають місце наступні асимптотичні розклади:*

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C \cong \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^3\left(1-\rho\right)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^3\left(1-\rho\right)^k\right\}, r = 3, \\ \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\left(1-\rho\right)^k, r = 2, \end{cases} \tag{0.1}$$

де при $k \in N$ коефіцієнти α_k^3, β_k^3 та γ_k^2 обчислюються за допомогою ре-

курентних формул, що виражаються через значення спеціальних функцій $\varphi_3(\rho)$ *та* $\psi_2(\rho)$ *і константи Н.І. Ахієзера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара.*

Асимптотичний розклад величини $\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C$ був отриманий в роботі Е.Л. Штарка [12].

Розділ 1

Огляд літератури

1.1. Наближення диференційовних функцій лінійними методами підсумовування рядів Фур'є

На теперішній час у галузі теорії апроксимації розроблено багато лінійних методів наближення тригонометричними поліномами у просторах періодичних функцій.

Початок досліджень апроксимативних властивостей лінійних методів відносно класів диференційовних функцій був покладений в роботі А.М. Колмогорова [13], який показав, що

$$\mathcal{E}\left(W^r, S_n\right) = \sup_{f \in W^r} \left\| f\left(x\right) - S_n\left(f; x\right) \right\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(n^{-r}\right) \tag{1.1}$$

де $S_n\left(f; x\right)$ – частинні суми порядку n ряду Фур'є функції f.

Наступний істотній крок в знаходженні величин типу (1.1) належить С.М. Нікольському [4]–[5], який узагальнив вище вказані результати на більш широкі класи функцій. Ці дослідження Колмогорова і Нікольського поклали початок новому напрямку в теорії наближення функцій і в теорії рядів Фур'є.

Б. Надем [14]–[15], С.Б. Стєчкіним [7]–[8], С.О. Теляковським [8]–[9], Л.І. Баусовим [1] та іншими були розроблені методи, що дозволяють розв'язувати задачу Колмогорова-Нікольського на класах Соболєва W^r для широкого класу лінійних методів підсумовування рядів Фур'є.

1.2. Наближення диференційовних функцій гармонійними інтегралами Пуассона

Апроксимативні властивості методу наближення гармонійними інтегралами Пуассона $A_\rho(f,x)$ на класах Соболєва W^r, $r \in N$ досліджувались в роботах В.П. Натансона [3], О.П. Тімана [10], Б. Надя [16], Е.Л. Штарка [12], В.О. Баскакова [2], Л.П. Фалалеєва [11] та інших.

І.П. Натансон [3] розв'язав задачу Колмогорова-Нікольського на класі W^1 для гармонійного інтеграла Пуассона:

$$\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C = \frac{2}{\pi}\left(1-\rho\right)\left|\ln\left(1-\rho\right)\right| + O\left(1-\rho\right), \ \rho \to 1- . \tag{1.2}$$

В роботі [10] О.П. Тіман одержав точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ для довільного $r \in N$ при $0 \le \rho < 1$:

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_0\right)_C = K_r;$$

$$\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + \varepsilon_\rho, \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1-\rho}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t} + 1\right\}dt,$$

при $0 < \rho < 1$. Для парних r маємо:

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = \sum_{i=1}^{r/2} \frac{1}{(2i-1)!} \tilde{K}_{r-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-2)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{r-2i} \ln^{2i} \frac{1}{\rho} - \alpha_\rho^r,$$

$$\alpha_\rho^r = \frac{4}{\pi} \int_\rho^1 \int_{t_r}^1 \ldots \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_r} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 \ldots dt_r, \tag{1.4}$$

а для непарних r:

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!} \tilde{K}_{r-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{r-2i} \ln^{2i} \frac{1}{\rho} + \beta_\rho^r,$$

$$\beta_\rho^r = \frac{2}{\pi} \int_\rho^1 \int_{t_r}^1 \ldots \int_{t_2}^1 \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2 \ldots t_r} dt_1 dt_2 \ldots dt_r, \tag{1.5}$$

де K_n і $\tilde{K}_n$ – константи Н.І. Ахієзера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара:

$$K_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n \in N.$$

Зокрема, для класів W^2 та W^3 формули Тімана дають:

$$\mathcal{E}\left(W^2, A_\rho\right)_C = K_1 \ln \frac{1}{\rho} - \beta_\rho^2, \quad \beta_\rho^2 = \frac{2}{\pi} \int_\rho^1 \int_{t_2}^1 \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2} dt_1 dt_2,$$

$$\mathcal{E}\left(W^3, A_\rho\right)_C = \frac{1}{2} K_2 \ln^2 \frac{1}{\rho} + \alpha_\rho^3, \quad \alpha_\rho^3 = \frac{4}{\pi} \int_\rho^1 \int_{t_3}^1 \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 dt_3.$$

О.П. Тіман також зауважив, що при $\rho \to 1-$:

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi}(1+\ln 2)(1-\rho) + o(1-\rho),$$
$$\alpha_\rho^r = O\left((1-\rho)^r\right),\ \beta_\rho^r = O\left((1-\rho)^r \ln\frac{1}{1-\rho}\right).$$

Рівності (1.2) і (1.3) при $\rho \to 1-$ дозволяють виписувати константи, що відповідають асимптотичному доданку найменшої степені малості.

Важливий крок було зроблено в роботі Е.Л. Штарка [12], де знайдено асимптотичний розклад характеристики $\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C$, що дозволяє виписувати константи, які відповідають асимптотичним доданкам будь-якої степені малості:

$$\mathcal{E}\left(W^1, A_\rho\right)_C \cong \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k (1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k\right\}, \tag{1.6}$$

де

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + \ln 2 - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{2^{-i}}{i}\right).$$

Однак, питання про знаходження асимптотичних розкладів величин $\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C$ при конкретних значеннях $r = 2, 3$ є менш висвітлене. Зокрема, не було виписано асимптотичних розкладів для класів W^2 та W^3, хоча точні значення цих величин при $0 \le \rho < 1$ були відомі з роботи О.П. Тімана.

Метою даної роботи є заповнення цієї прогалини шляхом знаходження асимптотичних розкладів для класів W^2 (парний випадок) та W^3 (непарний випадок), що дозволить узагальнити результат Е.Л. Штарка на випадки вищих порядків диференційовності.

Розділ 2

Наближення функцій класів W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона

2.1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження

Нехай W^r, $r = 2, 3$ — множина 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}\left|f^{(r)}(x)\right| \le 1$.

Для 2π-періодичної сумовної на періоді функції f через $A_\rho(f,x)$ будемо позначати гармонійний інтеграл Пуассона, тобто при $0 \le \rho < 1$

$$A_\rho(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right\}dt. \tag{2.1}$$

В цьому розділі вивчається поведінка величин

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = \sup_{f\in W^r}\left\|f(x) - A_\rho(f,x)\right\|_C \tag{2.2}$$

при $0 \le \rho < 1$ для $r = 2, 3$.

Якщо в явному вигляді знайдена функція $g(\rho) = g(W^r;\rho)$ така, що при $\rho \to 1-$

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = g(\rho) + o\left(g(\rho)\right), \tag{2.3}$$

то наслідуючи О.І. Степанця [6, с. 198] будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова-Нікольського для класу W^r і наближаючого агрегату A_ρ.

Формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ називається *асимптотичним розкладом* або *асимптотикою* функції $f(\rho)$ при $\rho \to 1-$, якщо для довільного натурального N, при $\rho \to 1-$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{N} g_n(\rho) + o\left(g_N(\rho)\right) \tag{2.4}$$

і для всіх n

$$\left|g_{n+1}(\rho)\right| = o\left(\left|g_n(\rho)\right|\right). \tag{2.5}$$

Коротко будемо це записувати наступним чином

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

В даному розділі розглянуті асимптотичні розклади величин (2.2), а також значення цих величин при $0 \le \rho < 1$ для випадків $r = 2$ та $r = 3$.

Встановимо наступні твердження, що стосуються асимптотичних розкладів спеціальних функцій

$$\psi_2(\rho) = \int_\rho^1 \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 \tag{2.6}$$

та

$$\varphi_3(\rho) = \int_\rho^1 \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 dt_3, \tag{2.7}$$

через які виражаються оцінки величин $\mathcal{E}\left(W^2, A_\rho\right)_C$ та $\mathcal{E}\left(W^3, A_\rho\right)_C$ відповідно.

Лема 2.1. *Для функції $\varphi_3(\rho)$, справедливий наступний асимптотичний розклад:*

$$\varphi_3(\rho) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^3 (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k^3 (1-\rho)^k \right\},$$

де при $k \in N$

$$\alpha_k^3 = \frac{(-1)^k}{k!} a_3^k, \tag{2.8}$$

$$\beta_k^3 = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \varphi_{3-i}(0)\, a_i^k + a_3^k \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right) + S_k^3 \right\}, \tag{2.9}$$

$$\varphi_n(0) = \begin{cases} \pi/2K_n, n - \textit{непарне}, \\ \pi/2\tilde{K}_n, n - \textit{парне}, \end{cases}$$

де K_n і $\tilde{K}_n$ константи Н.І. Ахієзера - М.Г. Крейна - Ж. Фавара:

$$K_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, ...; \quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n \in N,$$

$$S_k^3 = \begin{cases} 0, k \le 3, \\ \sum\limits_{i=4}^{k} \frac{a_i^k}{2^{i-3}} + \sum\limits_{i=1}^{k-3} A_i^{k-1} a_3^{k-i}, k > 3, \end{cases}$$

$$a_i^j = \begin{cases} 0, i > j, \\ (-1)^j (j-1)!, i = 1, \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1} (j-1), i \le j \le 3, \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1} (j-2), 4 = i \le j, \\ -(i-4)\, a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1} (j-i+2), 4 < i \le j, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$A_k^n = (-1)^{k-1} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k}. \tag{2.11}$$

Доведення. Нехай

$$\varphi_3(\rho) = \alpha_1^3(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + o\left((1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}\right).$$

Тоді

$$\alpha_1^3 = -\lim_{\rho\to 1-}\frac{\varphi_3(\rho)}{(1-\rho)\ln(1-\rho)}.$$

А якщо

$$\varphi_3(\rho) = \alpha_1^3(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_1^3(1-\rho) + o\left(1-\rho\right),$$

то

$$\beta_1^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{\varphi_3(\rho) + \alpha_1^3\,(1-\rho)\ln(1-\rho)}{1-\rho}.$$

Таким чином, згідно з умовами (2.4) і (2.5), можливість асимптотичного розкладу функції $\varphi_3\left(\rho\right)$ у вигляді

$$\varphi_3\left(\rho\right) \cong \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^3\left(1-\rho\right)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^3\left(1-\rho\right)^k\right\}, \tag{2.12}$$

рівносильна тому, що коефіцієнти α_k^3 і β_k^3 пов'язані з функцією $\varphi_3\left(\rho\right)$ співвідношеннями

$$\alpha_k^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{-1}{\left(1-\rho\right)^k\ln\left(1-\rho\right)}\times$$
$$\times\left\{\varphi_3\left(\rho\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\left[\alpha_j^3\left(1-\rho\right)^j\ln\left(1-\rho\right) - \beta_j^3\left(1-\rho\right)^j\right]\right\}, \tag{2.13}$$

$$\beta_k^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{\left(1-\rho\right)^k}\Big\{\varphi_3\left(\rho\right) + \alpha_k^3\left(1-\rho\right)^k\ln\left(1-\rho\right) +$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\left[\alpha_j^3\left(1-\rho\right)^j\ln\left(1-\rho\right) - \beta_j^3\left(1-\rho\right)^j\right]\Big\} \tag{2.14}$$

(для перевірки умов (2.4) і (2.5) потрібно покласти $g_{2k-1} = \alpha_k^3 \left(1-\rho\right)^k \ln \frac{1}{1-\rho}$ і $g_{2k} = \beta_k^3 \left(1-\rho\right)^k$).

Отже, для доведення леми 2.1 достатньо лише показати, що α_k^3 та β_k^3 знайдені із (2.13), (2.14) мають вигляд (2.8), (2.9).

Застосовуючи правила Лопіталя k раз до невизначеностей виду 0/0 при $k = 1$, отримаємо:

$$\alpha_1^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{-\varphi_3\left(\rho\right)}{\left(1-\rho\right)\ln\left(1-\rho\right)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-} \frac{-1}{\left(1+\ln\left(1-\rho\right)\right)\rho} \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 = 0.$$

$$\beta_1^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{\varphi_3\left(\rho\right)}{1-\rho} = \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 = \varphi_2\left(0\right),$$

при $k = 2$

$$\alpha_2^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{-\varphi_3(\rho) + \varphi_2(0)(1-\rho)}{\left(1-\rho\right)^2 \ln\left(1-\rho\right)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{-2(1-\rho)\ln(1-\rho) - (1-\rho)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 - \varphi_2(0) \right\} =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{2\ln(1-\rho)+3} \left\{ \frac{-1}{\rho^2} \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2} \int\limits_0^{\rho} \frac{1}{t_1} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \right\} = 0.$$

$$\beta_2^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{\varphi_3(\rho) - \varphi_2(0)(1-\rho)}{\left(1-\rho\right)^2} =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-} \frac{1}{-2(1-\rho)} \left\{ -\frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \varphi_2(0) \right\} =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \right\} = \frac{1}{2} \left(\varphi_2(0) - \varphi_1(0) \right).$$

а при $k \leq 2$, враховуючи, що

$$\frac{d^k \varphi_3(\rho)}{d\rho^k} = \frac{a_1^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \frac{a_2^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 +$$

$$+ \frac{a_3^k}{\rho^k} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{a_4^k}{\rho^{k-1}} \left(\frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right) + \frac{a_5^k}{\rho^{k-2}} \left(\frac{1}{(1+\rho)^2} - \frac{1}{(1-\rho)^2} \right) +$$

$$+ \ldots + \frac{a_k^k}{\rho^3} \left(\frac{1}{(1+\rho)^{k-3}} + \frac{(-1)^{k-2}}{(1-\rho)^{k-3}} \right), \qquad (2.15)$$

де через a_i^k, $i = \overline{1,k}$ позначено коефіцієнти, що визначаються послідовно за рекурентними формулами (2.10), і

$$\frac{d^k}{d\rho^k} \left((1-\rho)^k \ln(1-\rho) \right) = (-1)^k k! \left(\ln(1-\rho) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right), \qquad (2.16)$$

маємо:

$$\alpha_k^3 = \lim_{\rho \to 1-} \frac{-1}{(-1)^k k! \left(\ln(1-\rho) + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{a_1^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \frac{a_2^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \right\} = 0,$$

$$\beta_k^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{(-1)^k\, k!} \left\{ \frac{a_1^k}{\rho^k} \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2^k}{\rho^k} \int\limits_0^\rho \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \right\} = \sum_{i=1}^{2} \varphi_{3-i}(0)\, a_i^k.$$

У випадку, коли $k = 3$, застосувавши співвідношення (2.16), отримаємо:

$$\alpha_3^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{-\frac{d^3\varphi_3(\rho)}{d\rho^3}}{(-1)^3\, 3! \left(\ln(1-\rho) + \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \right)},$$

$$\beta_3^3 = \frac{1}{(-1)^3\, 3!} \lim_{\rho\to 1-} \left(\frac{d^3\varphi_3(\rho)}{d\rho^3} + \alpha_3^3 (-1)^3\, 3! \left(\ln(1-\rho) + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \right) \right).$$

Звідси, згідно (2.15)

$$\alpha_3^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{-1}{(-1)^3\, 3! \left(\ln(1-\rho) + \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{a_1^3}{\rho^3} \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \frac{a_2^3}{\rho^3} \int\limits_0^\rho \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 + \frac{a_3^3}{\rho^3} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \right\} = \frac{a_3^3}{(-1)^3\, 3!},$$

$$\beta_3^3 = \frac{1}{(-1)^3 3!} \lim_{\rho\to 1-} \left\{ \frac{a_1^3}{\rho^3} \int\limits_0^\rho \int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2^3}{\rho^3} \int\limits_0^\rho \frac{1}{t_1} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 + \frac{a_3^3}{\rho^3} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + a_3^3 \left(\ln(1-\rho) + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^3\, 3!} \left(\sum_{i=1}^{2} \varphi_{3-i}(0) a_i^3 + a_3^3 \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} \right) \right).$$

Розглянемо тепер випадок, коли $k > 3$. Для цього будуть потрібні такі співвідношення

$$\frac{d^k}{d\rho^k}\{(1-\rho)^{\mu}\ln(1-\rho)\} = \frac{(-1)^{\mu+1}\,\mu!\,(k-\mu-1)!}{(1-\rho)^{k-\mu}}\,(k>\mu\geq 0)\,, \qquad (2.17)$$

що випливає із (2.16) та

$$\lim_{\rho\to 1-}\sum_{i=1}^{k-3}\left(\frac{a_{i+3}^{k}\,(-1)^{i+1}}{\rho^{k-i}} - a_3^{k-i}\,(i-1)!\right)\frac{1}{(1-\rho)^i} = \sum_{i=1}^{k-3}A_i^{k-1}a_3^{k-i}, \qquad (2.18)$$

де a_i^j пов'язані між собою співвідношеннями (2.10). Для встановлення (2.18) достатньо здійснити граничний перехід при $\rho\to 1-$ в співвідношенні

$$\sum_{i=1}^{k-3}\left(\frac{a_{i+3}^{k}\,(-1)^{i+1}}{\rho^{k-i}} - a_3^{k-i}\,(i-1)!\right)\frac{1}{(1-\rho)^i} =$$

$$= \sum_{i_{k-3}=1}^{k-1}\left(a_3^{k-1}0! - \sum_{i_{k-4}=1}^{i_{k-3}-1}\left(a_3^{k-2}1! - ... - \sum_{i_1=1}^{i_2-1}a_3^3\,(k-4)!\right)\right)...\Bigg)\,\rho^{i_{k-3}-k}.$$

та зауважити, що

$$\sum_{i_1=1}^{k-1}\sum_{i_2=1}^{i_1-1}...\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1}1 = \frac{(k-1)\,(k-2)\,...\,(k-m)}{m!}, \quad m\leq k-1.$$

Із (2.17) і (2.18), формул (2.13), (2.14) для обчислення α_k^3 і β_k^3 після спрощень отримуємо при $k=4$

$$\alpha_4^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{-1}{(-1)^4\,4!\left(\ln(1-\rho)+\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{i}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{a_1^4}{\rho^4}\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2}\frac{1}{t_1t_2}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1dt_2 + \frac{a_2^4}{\rho^4}\int\limits_0^{\rho}\frac{1}{t_1}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1+\right.$$

$$\left.+\frac{a_3^4}{\rho^4}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{a_4^4}{\rho^3}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right) + \alpha_3^3\frac{(-1)^4 3!}{1-\rho}\right\} = \frac{a_3^4}{(-1)^4 4!},$$

і

$$\beta_4^3 = \lim_{\rho\to 1-} \frac{1}{(-1)^4\,4!}\left\{\frac{a_1^4}{\rho^4}\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2}\frac{1}{t_1 t_2}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1 dt_2\right.$$

$$+\frac{a_2^4}{\rho^4}\int\limits_0^{\rho}\frac{1}{t_1}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1 + \frac{a_3^4}{\rho^4}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{a_4^4}{\rho^3}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right) -$$

$$\left. -a_3^3\frac{1}{1-\rho} + a_3^4\left(\ln(1-\rho) + \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^4 4!}\left\{\sum_{i=1}^{2}\varphi_{3-i}(0)a_i^4 + a_3^4\left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}\right) + \frac{a_4^4}{2}\right\},$$

а при $k>3$ враховуючи, що

$$\sum_{j=3}^{k-1} a_3^j \frac{(k-j-1)!}{(1-\rho)^{k-j}} = \sum_{j=1}^{k-3} a_3^{k-j}\frac{(j-1)!}{(1-\rho)^j},$$

отримаємо

$$\alpha_k^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{-1}{(-1)^k\,k!\left(\ln(1-\rho) + \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{a_1^k}{\rho^k}\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2}\frac{1}{t_1 t_2}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1 dt_2\right.$$

$$+\frac{a_2^k}{\rho^k}\int\limits_0^{\rho}\frac{1}{t_1}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1 + \frac{a_3^k}{\rho^k}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} +$$

$$+\frac{a_4^k}{\rho^{k-1}}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right) + \frac{a_5^k}{\rho^{k-2}}\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}-\frac{1}{(1-\rho)^2}\right) + \ldots +$$

$$\left.+\frac{a_k^k}{\rho^3}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{k-3}} + \frac{(-1)^{k-2}}{(1-\rho)^{k-3}}\right) - \sum_{j=3}^{k-1} a_3^j\frac{(k-j-1)!}{(1-\rho)^{k-j}}\right\} = \frac{a_3^k}{(-1)^k\,k!},$$

і

$$\beta_k^3 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{(-1)^k\,k!}\left\{\frac{a_1^k}{\rho^k}\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{t_2}\frac{1}{t_1 t_2}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1 dt_2\right.$$

$$+\frac{a_2^k}{\rho^k}\int\limits_0^{\rho}\frac{1}{t_1}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1+\frac{a_3^k}{\rho^k}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+$$

$$+\frac{a_4^k}{\rho^{k-1}}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)+\frac{a_5^k}{\rho^{k-2}}\left(\frac{1}{(1+\rho)^2}-\frac{1}{(1-\rho)^2}\right)+...+$$

$$+\frac{a_k^k}{\rho^3}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{k-3}}+\frac{(-1)^{k-2}}{(1-\rho)^{k-3}}\right)-\sum_{j=3}^{k-1}a_3^j\frac{(k-j-1)!}{(1-\rho)^{k-j}}+$$

$$\left.+a_3^k\left(\ln(1-\rho)+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{(-1)^k\,k!}\left\{\sum_{i=1}^{2}\varphi_{3-i}(0)\,a_i^k+a_3^k\left(\ln 2+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)+\sum_{i=4}^{k}\frac{a_i^k}{2^{i-3}}+\sum_{i=1}^{k-3}A_i^{k-1}a_3^{k-i}\right\}.$$

Лема 2.1 доведена.

Лема 2.2. *Для функції $\psi_2(\rho)$ справедливий наступний асимптотичний розклад:*

$$\psi_2(\rho)\cong\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2(1-\rho)^k,$$

де при $k\in N$

$$\gamma_k^2=\frac{(-1)^k}{k!}\left\{\psi_1(0)\,b_1^k+\psi_0(0)\,b_2^k+\sigma_k^2\right\}, \tag{2.19}$$

$$\psi_n(0)=\begin{cases}\pi/4K_n, n - \textit{парне},\\ \pi/4\tilde{K}_n, n - \textit{непарне},\end{cases}$$

де K_n і $\tilde{K}_n$ константи Н.І. Ахієзера - М.Г. Крейна - Ж. Фавара:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ n = 0,1,2,...;\quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n \in N,$$

$$\sigma_k^2 = \begin{cases} 0, k \le 2, \\ \sum\limits_{i=3}^{k} \frac{b_i^k}{2^{i-2}}, k > 2, \end{cases}$$

$$b_i^j = \begin{cases} 0, i > j, \\ (-1)^j\,(j-1)!, i = 1, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}\,(j-1)\,, i \le j \le 2, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}\,(j-2)\,, i = 3 \le j, \\ -2\,(i-3)\,b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}\,(j-2i+4)\,, i > 3, i \le j. \end{cases} \tag{2.20}$$

Доведення. В асимптотичному розкладі функції $\psi_2\,(\rho)$ у вигляді

$$\psi_2\,(\rho) \cong \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\,(1-\rho)^k,$$

коефіцієнти γ_k^2 необхідно пов'язані з функцією $\psi_2\,(\rho)$ співвідношенням

$$\gamma_k^2 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{(1-\rho)^k}\left\{\psi_2\,(\rho) - \sum_{j=1}^{k-1}\gamma_j^2\,(1-\rho)^j\right\}. \tag{2.21}$$

Отже, для доведення леми 2.2 достатньо лише показати, що γ_k^2 знайдені із (2.21), мають вигляд (2.19).

Застосовуючи правило Лопіталя k раз до невизначеностей виду $0/0$ при $k = 1$, отримаємо:

$$\gamma_1^2 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{\psi_2(\rho)}{1-\rho} = \lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}\frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1}dt_1 = \psi_1(0),$$

а враховуючи, що при $k \geq 1$

$$\frac{d^k \psi_2(\rho)}{d\rho^k} = \frac{b_1^k}{\rho^k}\int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1} dt_1 + \frac{b_2^k}{\rho^k}\operatorname{arctg}\rho + \frac{b_3^k}{\rho^{k-1}}\frac{1}{1+\rho^2} +$$

$$+\frac{b_4^k}{\rho^{k-2}}\frac{1}{\left(1+\rho^2\right)^2} + ... + \frac{b_k^k}{\rho^{2k-2+1}}\frac{1}{\left(1+\rho^2\right)^{k-2}},$$

де через b_i^k, $i = \overline{1,k}$ позначено коефіцієнти, що визначаються послідовно за рекурентними формулами (2.20), одержимо

$$\gamma_k^2 = \lim_{\rho\to 1-}\frac{1}{(-1)^k k!}\left\{\frac{b_1^k}{\rho^k}\int\limits_0^\rho \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1} dt_1 + \frac{b_2^k}{\rho^k}\operatorname{arctg}\rho + \right.$$

$$\left. +\frac{b_3^k}{\rho^{k-1}}\frac{1}{1+\rho^2} + \frac{b_4^k}{\rho^{k-2}}\frac{1}{\left(1+\rho^2\right)^2} + ... + \frac{b_k^k}{\rho^{2k-1}}\frac{1}{\left(1+\rho^2\right)^{k-2}}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\left\{\psi_1(0)b_1^k + \psi_0(0)b_2^k + \sigma_k^2\right\}.$$

Лема 2.2 доведена.

2.2. Асимптотичні розклади верхніх меж наближень гармонійними інтегралами Пуассона на класах W^2 та W^3

Теорема 2.1. *Мають місце наступні асимптотичні розклади:*

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C \cong \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^3\left(1-\rho\right)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^3\left(1-\rho\right)^k\right\}, r = 3, \\ \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\left(1-\rho\right)^k, r = 2, \end{cases} \qquad (2.22)$$

де коефіцієнти α_k^3, β_k^3 і γ_k^2 обчислюються відповідно за допомогою формул (2.8), (2.9), (2.10) і (2.19), (2.20).

Доведення. Згідно з співвідношенням (6) із [10]

$$\mathcal{E}\left(W^r, A_\rho\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(r+1)}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{2.23}$$

Права частина рівності (2.23) при $r=2$ набуває вигляду

$$\mathcal{E}\left(W^2, A_\rho\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{3}}$$

і тотожно співпадає з функцією $\psi_2(\rho)$, $0 \le \rho < 1$ (див. (2.6)).

При $r=3$ права частина рівності (2.23) набуває вигляду

$$\mathcal{E}\left(W^3, A_\rho\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{4}}$$

Оскільки

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{4}} = \varphi_3(\rho),$$

де $\varphi_3(\rho)$ – функція, що визначена формулою (2.7), то маємо

$$\mathcal{E}\left(W^3, A_\rho\right)_C = \frac{2}{\pi}\varphi_3(\rho).$$

Асимптотичні розклади функцій $\psi_2(\rho)$ та $\varphi_3(\rho)$ подані в лемах 2.2 і 2.1 відповідно, звідки отримуємо твердження теореми. **Теорема 2.1 доведена.**

Висновки

Таким чином, у даній магістерській роботі вивчається оцінка швидкості наближення функцій з класів W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона. Зокрема, в ній:

Встановлено асимптотичні розклади величин $\mathcal{E}(W^r, A_\rho)_C$ для $r = 2$ та $r = 3$ при $\rho \to 1-$, що дозволяє виписувати константи, які відповідають асимптотичним доданкам будь-якої степені малості. Показано суттєву різницю в структурі розкладів: для парного випадку $r = 2$ асимптотичний розклад має вигляд

$$\mathcal{E}(W^2, A_\rho)_C \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 (1-\rho)^k,$$

тоді як для непарного випадку $r = 3$ з'являються логарифмічні доданки:

$$\mathcal{E}(W^3, A_\rho)_C \cong \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^3 (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k^3 (1-\rho)^k \right\}.$$

Ці результати узагальнюють відомий результат Е.Л. Штарка для класу W^1 на випадки $r = 2$ та $r = 3$.

Список використаних джерел

1. *Bausov L.I.* Linear methods of summing Fourier series with prescribed rectangular matrices. I // Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika. — 1965. — **46**, №3. — P. 15–31.

2. *Baskakov V.A.* Some properties of operators of Abel-Poisson type // Math. Notes. — 1975. — **17**, №2. — P. 101–107.

3. *Natanson I.P.* Theory of Functions of a Real Variable, Vol. II. — Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1960.

4. *Nikol'skii S.M.* Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. — Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.

5. *Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M.* Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems, Vol. 1. — V.H. Winston & Sons–John Wiley & Sons, New York, 1978.

6. *Stepanets A.I.* Classification and Approximation of Periodic Functions. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. — 360 p.

7. *Bary N.K.* A Treatise on Trigonometric Series, Vol. II. — Pergamon Press–Macmillan, New York, 1964.

8. *Stechkin S.B., Telyakovskii S.A.* Approximation of differentiable functions by

trigonometric polynomials in the L metric // Proc. Steklov Inst. Math. — 1967. — **88**. — P. 20–29.

9. *Telyakovskii S.A.* Approximation of functions of higher smoothness by Fourier sums // Ukrainian Math. J. — 1989. — **41**, № 4. — P. 444–451.

10. *Timan A.F.* Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. — Oxford: Pergamon Press, 1963. — 631 p.

11. *Falaleev L.P.* On approximation of functions by generalized Abel-Poisson operators // Sib. Math. J. — 2001. — **42**, № 4. — P. 779–788.

12. *Shtark E.L.* Complete asymptotic expansion for the upper bound of the deviation of functions from Lip_1 from their singular Abel-Poisson integral // Math. Notes. — 1973. — **13**, № 1. — P. 21–28.

13. *Kolmogoroff A.N.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. of Math. — 1935. — **36**, № 2. — P. 521–526.

14. *Szökefali – Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall // Berichte der math. phys. KL. Akad. Wiss. Leipzig. — 1938. — **90**. — P. 103–134.

15. *Szökefali – Nagy B.* Méthodes de sommation des séries de Fourier. III // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1950. — **13**. — P. 247–251.

16. *Szökefali – Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183–188.

Анотація

Жигалло М. К. Асимптотичне наближення функцій класів W^2 та W^3 гармонійними інтегралами Пуассона. Магістерська робота для здобуття ступеня магістра за спеціальністю 111 «Математика». Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра теорії функцій та методики навчання математики. Луцьк, 2025. 31 с., список використаних джерел із 16 найменувань, 2 розділи, 2 підрозділи.

У даній роботі досліджується поведінка верхніх меж наближень функцій з класів Соболєва W^2 та W^3 їх гармонійними інтегралами Пуассона. Виписані асимптотичні розклади апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(W^r, A_\rho)_C$ при $\rho \to 1-$ для випадків $r = 2$ (парний) та $r = 3$ (непарний). Показано, що для парного випадку $r = 2$ асимптотичний розклад не містить логарифмічних доданків, тоді як для непарного випадку $r = 3$ з'являються члени з $\ln \frac{1}{1-\rho}$. Коефіцієнти розкладів виражаються через рекурентні співвідношення та значення спеціальних функцій $\psi_2(\rho)$ і $\varphi_3(\rho)$. Також виписано точні значення величин $\mathcal{E}(W^r, A_\rho)_C$ для $r = 2, 3$ при довільному $0 \le \rho < 1$. Отримані результати узагальнюють відомий результат Е.Л. Штарка для класу W^1 і демонструють суттєву структурну різницю між асимптотичними розкладами для парних і непарних порядків диференційовності. При знаходженні асимптотичних розкладів використовується техніка, розроблена Е.Л. Штарком, у

поєднанні з методами О.П. Тімана.

Ключові слова: асимптотичний розклад, гармонійний інтеграл Пуассона, клас Соболєва, верхня межа наближення, задача Колмогорова-Нікольського.

Annotation

Zhyhallo M. K. Asymptotic approximation of functions from classes W^2 and W^3 by Poisson harmonic integrals. Master's thesis for obtaining a master's degree in specialty 111 "Mathematics". Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of Function Theory and Methods of Teaching Mathematics. Lutsk, 2025. 31 p., list of references with 16 items, 2 chapters, 2 subsections.

This work investigates the behavior of upper bounds of approximations of functions from Sobolev classes W^2 and W^3 by their Poisson harmonic integrals. Asymptotic expansions of approximation characteristics $\mathcal{E}(W^r, A_\rho)_C$ as $\rho \to 1-$ are derived for cases $r = 2$ (even) and $r = 3$ (odd). It is shown that for the even case $r = 2$ the asymptotic expansion does not contain logarithmic terms, while for the odd case $r = 3$ terms with $\ln \frac{1}{1-\rho}$ appear. The coefficients of expansions are expressed through recurrence relations and values of special functions $\psi_2(\rho)$ and $\varphi_3(\rho)$. Exact values of quantities $\mathcal{E}(W^r, A_\rho)_C$ for $r = 2, 3$ at arbitrary $0 \leq \rho < 1$ are also presented. The obtained results generalize the known result of E.L. Shtark for class W^1 and demonstrate a substantial structural difference between asymptotic expansions for even and odd orders of differentiability. The technique developed by E.L. Shtark combined with methods of O.P. Timan is used to find asymptotic expansions.

Keywords: asymptotic expansion, Poisson harmonic integral, Sobolev class, upper bound of approximation, Kolmogorov-Nikol'skii problem.