

Міністерство освіти і науки України
Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Семенюк Галина Миколаївна

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО- КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Науковий керівник:
ПАДАЛКО НІНА ЙОСИПІВНА,
доцент кафедри теорії функцій
та методики навчання математики,
кандидат педагогічних наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____
засідання кафедри теорії функцій та методики навчання математики
від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри
Гембарська С.Б. _____

ЛУЦЬК - 2025

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	4
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	10
1.1. Розвиток лінійного програмування.....	10
1.2. Математична модель прикладних задач	13
1.3. Методи знаходження розв'язку задач.....	21
РОЗДІЛ II. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	30
2.1. Технологія знаходження розв'язку задачі лінійного програмування за підтримки сучасних систем комп'ютерної математики.....	30
2.2. Опис та характеристика системи динамічної математики GeoGebra.....	38
2.3. Особливості використання системи GeoGebra при вивченні лінійного програмування.....	48
РОЗДІЛ III. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	58
3.1. Порівняльна характеристика математичних курсів за вибором та курсу за вибором «Господарські задачі лінійного програмування».....	58
3.2. Формування вмінь та навичок при вивченні курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики»	63

3.3. Результативність впровадження курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики».....	72
ВИСНОВОК.....	79
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	80
ДОДАТКИ.....	89

АНОТАЦІЯ

Г.М. Семенюк. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні лінійного програмування. Магістерська робота.- Луцьк, 2025. 80 с.

У дослідженні наведені приклади використання програм динамічної математики при розв'язуванні економічних задач з лінійного програмування, які традиційно передбачають залучення аналітичного апарату. Продemonстровано особливості навчання курсу «Економічні задачі лінійного програмування» в процесі підготовки старшокласників до майбутньої професії, особлива увага звертається на осучаснення профілю програми навчального курсу в контексті впровадження нових стандартів. Запропоновано аналіз пропедевтичних завдань курсу «Економічні задачі лінійного програмування» та деталізується використання правило-рієнтирів задля розв'язування прикладних задач з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Робиться акцент на потребі накопичення емпіричного досвіду математичного дослідження і висновок про необхідність зміщення акцентів навчання математики у бік обов'язкового залучення і вивчення комп'ютерних інструментів, які спрощують розв'язування окремих класів задач і сприяють формуванню якісного математичного знання.

Ключові слова: *задачі лінійного програмування, програми динамічної математики, графічний метод, інформаційно-комунікаційні технології, багатогранник розв'язків, GeoGebra.*

ABSTRACT

G.M. Semenyuk. The use of information and communication technologies in the study of linear programming. Master's work. Lutsk, 2025. 80 pp.

The study provides examples of the use of dynamic mathematics programs in solving economic problems in linear programming, which traditionally involve the involvement of analytical apparatus. The peculiarities of the course "Economic tasks of Linear Programming" in the process of preparation of senior pupils for the future profession are demonstrated, special attention is paid to updating the profile of the curriculum program in the context of the introduction of new standards. The analysis of the propedeutic tasks of the course "Economic tasks of linear programming" is proposed and the use of reference rules is used to solve applied problems using the system of dynamic mathematics GeoGebra. The emphasis is placed on the need to accumulate empirical experience in mathematical research and the conclusion about the need to shift the emphasis of mathematics training towards compulsory attraction and study of computer tools that simplify the solving of certain classes of problems and contribute to the formation of qualitative mathematical knowledge.

Key words: *linear programming problems, dynamic mathematics programs, graphical method, information and communication technologies, multithreading of solutions, GeoGebra.*

ВСТУП

Без комп'ютера в даний час не може функціонувати жодна галузь, в тому числі і освітня. Сучасному вчителю замало тільки власних якостей для стимулювання зацікавленості учнів до активної участі в навчанні. Інтерес до вивчення дисципліни зростає залежно від того, як вчитель організовує роботу на уроці, які нові технічні умови створенні для ефективного навчання. Впровадження на заняттях інформаційно-комунікаційних технологій дає можливість зробити їх нетрадиційними, яскравими, насиченими, інтегрувати знання з інших предметних галузей. Це надає можливість трансформувати певну навчальну дисципліну з предмету вивчення у засіб одержання новітніх знань. Використання комп'ютера має стати лаконічним доповненням роботи вчителя, а не замінювати собою педагогічну діяльність.

При вивченні математики використання новітніх технологій є найбільш виправдано, зокрема сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Вони активізують участь учнів у навчальній та виховній роботі під час освітньої діяльності, крім того полегшують знаходження розв'язків різноманітних теоретичних та прикладних задач. Сьогодні повсякденною є ситуація, в якій школярі математичні задачі «розв'язують» через пошукові сервіси і запити, використовуючи безмежні інтернет-ресурси. Крім того якщо кілька років назад, була можливість лише отримати відповідь на поставлене завдання, користуючись спеціалізованими математичними програмами, то сьогодні користувачам мережі розробники даного контенту дають можливість побачити не лише результат, а й весь шлях його отримання.

Наразі учням при вивченні математики необхідно володіти інформацією про різні сучасні інструменти для прийняття рішення та вміти ними користуватися, проте не можна нехтувати тим, що поза увагою користувачів даних ресурсів залишається формування математичних умінь у класичному розумінні. Адже, учень без особистих знань про математичне підґрунтя проблеми і шляхи її подолання, за допомогою влучно сформульованого запиту

та потужності мережі Інтернет забезпечує собі можливість вирішення завдань. Інформаційне забезпечення виступає сучасним інструментом знаходження розв'язків різноманітних задач, зокрема прикладних.

Актуальність теми. На наш погляд, враховуючи інтереси учнів, вчителів необхідно максимально акцентувати свою діяльність у навчанні математики на активне залучення спеціалізованих програм прикладної математики, в основі яких лежать математичні методи дослідження процесів. Використання віртуальних середовищ, з їх якісною візуальною і часто динамічною підтримкою, швидкими чисельними розрахунками, дає можливість збільшити кількість розв'язаних задач учнем, зменшує прояв «нелюбові» до математики, при цьому вивільняється час у всіх суб'єктів освітнього процесу, для здійснення якісного аналізу математичних ідей, поглядів, залежностей, методів, шляхів тощо.

Переважає більшість прикладних задач, розв'язання яких включає кількісну інформацію, зводяться до математичних, які реалізуються усілякими обчислювальними методами, основа яких полягає у побудові відповідних математичних моделей, котрі зберігають істотні риси оригіналу.

Мета дослідження: проаналізувати алгоритми знаходження розв'язку прикладних задач, застосовуючи для цього новітні інформаційно-комунікаційні технології та провести дослідження щодо ефективності використання різних систем комп'ютерної математики у реалізації засобів знаходження розв'язку задачі лінійного програмування при викладанні курсу за вибором.

Об'єктом дослідження є прикладні задачі.

Предметом дослідження є графічний метод їх розв'язання за допомогою додатку Geogebra.

Для досягнення мети ставимо такі **завдання**:

- 1) проаналізувати вплив впровадження пакетів спеціальних прикладних програм на навчальний процес з математичних дисциплін;
- 2) довести доцільність використання GeoGebra при вивченні курсу за вибором ;

3) розробити методичні матеріали курсу за вибором для учнів 9-11 класів;

4) дослідити ефективність використання впровадженого курсу.

Практичне значення одержаних результатів даної роботи полягає у наступному:

1) обґрунтовано доцільність вивчення прикладних задач з використанням інформаційно- комунікаційних технологій;

2) розроблено методичні матеріали курсу за вибором для учнів 9-11 класів;

3) показано ефективність запропонованого курсу з допомогою системи динамічної математики GeoGebra.

4) впроваджено шляхом проведення дослідницько-експериментальної роботи у Боратинському ліцеї Боратинської сільської ради Луцького району Волинської області;

5) розроблено методичні рекомендації до курсу за вибором.

Апробація роботи матеріали дослідження обговорювались та опубліковані в роботі - Семенюк Галина, Падалко Ніна. До питання застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процес. Математика. Інформаційні технології. Освіта. : Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції. Луцьк – Світязь 13 - 15 червня 2025р. с 244-246

Структура. Загальний обсяг роботи сторінок, з них - основного тексту. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатків.

У I розділі описуються теоретичні та методологічні основи лінійного програмування, зокрема виникнення та розвиток лінійного програмування, математична постановка задачі та методи розв'язування. У II розділі розглядається використання інформаційно-комунікаційних технологій в процесі вивчення курсу. В цьому розділі проведено аналіз кількох комп'ютерних технологій, зроблений акцент на систему динамічної математики

GeoGebra, продемонстровано її характеристики та особливості використання при вивченні лінійного програмування. У III розділі здійснено порівняння вже діючих курсів за вибором з математики, описано власну програму курсу за вибором, наведені результати дослідження, яке було проведено для експериментальної перевірки дієвості використання інформаційно-комунікаційних технологій.

РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Розвиток лінійного програмування

Обмеженість засобів та ресурсів землі, спонукає нас кожного дня, не усвідомлюючи цього, вирішувати проблему: як одержати максимальний прибуток, маючи при цьому обмежені можливості. Можна сміливо вступати в бій та гарантувати собі перемогу, маючи армію у 40 разів більшу, ніж у противника. Для досягнення найбільшого ефекту, володіючи обмеженими можливостями, потрібно побудувати план чи програму дій. До середини XX століття план в таких ситуаціях складався «на око». Науковцями були науково обґрунтовані ці дії та реалізований особливий математичний апарат, котрий отримав назву математичне програмування.

Певні завдання математичного програмування, зокрема оптимізаційні, зустрічаються ще в древній Греції. Проте сьогодні математичне програмування насамперед вивчає ознаки й рішення прикладних моделей економічно-математичних процесів. Саме в перших спробах використання прийомів математичного програмування в економічних прикладних дослідженнях, вбачають початок становлення його як незалежного наукового напрямку.

Перша економічна модель охоплювала прості міркування, які нагадували певні аспекти лінійного програмування. Найпершою вважають «Економічні таблиці» короля Людовика XV Ф. Кене (1758 р.), яка містила числову модель вітчизняної економіки. В даній праці економіка Франції розділена на три частини:

- 1) виробничу, яка включала найбільших землевласників;
- 2) торгівельну, яка складалася із відносин купців та ремісників;
- 3) нерухомості, яка містить майно королів, дворянства і церкви.

А. Сміт (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі) використовували математичні моделі як ілюстративний і дослідницький матеріали.

В роботах Ш. Фур'є (1823 р.) розглядається задача визначення максимально-мінімального відхилення у визначенні коренів систем рівнянь, тобто симплексний метод лінійного програмування. Цю задачу він зводить до відшукування найнижчої точки многогранника n -вимірному простору, котру встановили шляхом поступового перебору усіх вершин многогранника. Метод Фур'є і є основою симплексного методу.

У XIX сторіччі вагомий крок у розвиток лінійного програмування зробив математичний напрям (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт). В 1874 році Л. Вальрасом була запропонована складна математична модель економіки, до складу якої входили технологічні показники.

З XX сторіччі прийоми математичного програмування, зокрема лінійного, застосовувались дуже широко. Нобелівську премію у сфері економіки отримали практично всі праці, в яких були описані дані питання (Д. Хіте, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон). Досягнення у сфері практичної математики, а саме виникнення теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики, на даному етапі призвело до підвищення рівня формалізації мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін.

Аналізуючи дані праці, американський економіст В. Леонтьєв побудував числову модель американської економіки, в якій можна було простежити взаємозв'язок впливу урядової політики на події у галузі закупок в низці індустріальних сфер.

У 1931 році угорський математик Б. Егерварі дав означення задачі оптимального вибору та сформулював метод її розв'язання, який в теперішній час має назву угорський.

На початку 50-х років з виникнення комп'ютера друге народження отримало лінійне програмування. Американський економіст Т. Купманс тривалий час працював над рядом завдань військової тематики. Завдяки йому був створений математичний колектив для розробки військових проблем. Вони проаналізували задачі, які можна задати лінійними нерівностями, і зробили

висновок, що їх рішення побудоване на знаходженні екстремумів лінійних функцій на многогранниках.

1947 року Дж. Данциг, працюючи над задачами лінійного програмування, розробив симплекс-метод, в котру вбачають зародження лінійного програмування як незалежного розділу в математичному програмуванні. Лінійне програмування протягом цих років мало велике визнання в світі, цьому сприяли відомі постаті Купманс і Данциг. Черговим етапом стали роботи Дж. Неймана (1947 р.) про розвиток концепції двоїстості, які розширили можливості практичної реалізації прийомів лінійного програмування.

В цей же час Купмансу потрапляє до рук книжечка Канторовича з Росії, видана незначним тиражем, рекомендована власникам підприємства, з мінімумом математики, без алгоритмів та без доведень теорем.

Водночас відкриваються нові теоретичні спроби з всіляких напрямів математичного програмування, розробляються нові алгоритми:

1951 року — праця Г.Куна і А.Таккера, в якій сформульовані необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач;

1954 року — Чарнес і Лемке вивчили приближений прийом знаходження розв'язку задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями;

1955 року — праці щодо питань квадратичного програмування.

Громіздкий вклад у розвиток та удосконалення математичного програмування зробили іноземні вчені Р. Акоф, Р. Белман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Сааті, Р. Черчмен, А. Кофман. Виник ще один напрям, який отримав назву динамічне програмування, основоположником якого став американський математик Р.Белман.

На практиці задачі лінійного програмування мають складні та величезні ручні розрахунку, через що знаходження їх розв'язку проводять лише за підтримки комп'ютерної техніки, спочатку написавши програму. Математичною основою лінійного програмування є певні розділи лінійної алгебри. Саме воно знайшло захоплюючі новітні шляхи виходу математики в

Отже, оптимальний розв'язок будь-якої з трьох задач можна відшукати, знайшовши розв'язок хоча б однієї із вказаних задач.

Для переходу між записами задачі лінійного програмування, необхідно застосувати навички, зведення задачі мінімізації функції до задачі максимізації, переходу від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності та навпаки, і підмінювати змінні, що не відповідають умові невід'ємності. Тобто умову задачі на відшукування мінімуму функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ можна замінити умовою знаходження максимуму функції $F = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, оскільки $\min F = -\max(-F)$.

Обмеження-нерівність первинної задачі лінійного програмування (« $\leq$ »), можна переробити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність виду « $\geq$ » — в обмеження-рівність відніманням із його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Таким чином, обмеження - нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ перетвориться в обмеження - рівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($x_{n+1} \geq 0$), (е)

а обмеження-нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ — в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0). \quad (\epsilon)$$

У той же час кожне рівняння системи обмежень $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i. \end{cases} \quad (\delta)$$

Число додаткових невід'ємних змінних, які включаються, при трансформації обмежень-нерівностей в обмеження-рівність рівна числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, які включаються, володіють істотним економічним змістом. У випадку відображення, в обмеженнях первинної задачі лінійного програмування, витрат та наявних виробничих ресурсів, числове значення додаткової змінної в розв'язку задачі, зображеної у формі основної, складає об'єм невживаного відповідного ресурсу.

Зауважимо, що змінну x_k , яка не відповідає умові невід'ємності, можна замінити двома невід'ємними змінними u_k і v_k , оформивши $x_k = u_k - v_k$.

Переважає кількість економічних задач лінійного програмування, володіє різноманітною прикладною сутністю, будується за подібною математичною структурою, певні ознаки якої можна успішно використати при складанні алгоритмів знаходження розв'язку цих задач. Зважаючи на таку особливість, усі задачі лінійного програмування поділяють на дві великі групи.

До ряду задач першої групи відносяться задачі на добір оптимальної суміші сплавів та на складання оптимального раціону. Вони мають назву задачі про раціон. Типові задачі другої групи складають транспортна задача і задача про оптимальний добір. Вони носять назву задачі розподільного типу.

Розглянемо приклади задач лінійного програмування.

1. Задача оптимального виробничого планування

Однією із найбільш розповсюджених задач даної групи є задача про максимальний випуск продукції із наявних обмежених запасів сировини при різних технологіях виробництва. Сюди ж можна віднести задачу досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві із наявних запасів ресурсів різних видів продукції.

Приклад 1. Фірма виготовляє три види виробів А, В і С, для цього користуються токарним, фрезерним, зварювальним і шліфувальним обладнанням. Затрати часу на обробку одного товару для кожного з видів агрегатів згруповані в таблиці 1.1.

Також там же наведені сукупний фонд робочого часу кожного із видів даних агрегатів, а також прибуток від реалізації одного товару кожного виду.

Таблиця 1.1.

Вхідні дані до прикладу 1.

Вид агрегату	Затрати часу (верстато-год.) на обробку одного товару виду	Сукупний фонд робочого часу агрегату (год.)
--------------	--	---

	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Необхідно з'ясувати, яку кількість товарів і якого виду необхідно випустити фірмі, щоб прибуток від їх реалізації був найбільшим. Сформулювати математичну модель задачі.

Приклад 2. Молочне підприємство «КОМО» виробляє йогурт, ряжанку і молочний коктейль, розфасовані в пляшки. Для виробництва 1 тонни йогурту, ряжанки і коктейлю необхідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. Витрати робочого часу при фасуванні 1 т йогурта та ряжанки становлять 0,18 і 0,19 машино-годин. На розлитті 1 т коктейлю використовуються професійні агрегати впродовж 3,25 год. Загалом для виготовлення даних продуктів підприємство витрачає 136 000 кг молока. Основні машини зайняті 21,4 машино-годин, а спеціальні автомати із розливу коктейлю – протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т йогурту, ряжанки і коктейлю складає відношення 30, 22 і 136 грн. Щоденне виробництво йогурту на підприємстві становить не менше 100 т, розфасованого в пляшки. Обмежень на виготовлення інших продуктів нема.

Необхідно з'ясувати, у якій кількості та які продукти необхідно щоденно виготовляти підприємству, щоб прибуток від її реалізації максимально збільшити. Сформулювати математичну модель задачі.

2. Задача про оптимальний склад суміші

Доволі великий тип задач програмування становлять так звані задачі на складання сумішей або задачі на використання замінників.

Приклад 3. Для збалансованого харчування на фермі тваринам повсякденно дають не менше 60 одиниць калорійного продукту А, не менше 50 продукту В і не менше 12 одиниць продукту С. Ситні, калорійні продукти входять в склад трьох видів корму. Склад продуктів в 1 кг кожного з видів корму зображений у таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

Вхідні дані до прикладу 2

Калорійні продукти	Кількість одиниць калорійних продуктів в 1 кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Сформулювати денний раціон, для забезпечення збалансованого харчування при найменших грошових витратах, якщо ціна 1 кг корму I виду складає 9 коп., корму II виду — 12 коп. і корму III виду — 10 коп.

Приклад 4. Для виготовлення чавунного литва підприємство використовує n різних початкових шихтових матеріалів (чавун різних марок, сталевий брухт, ферофосфор та ін.). Хімічний склад чавунного литва вирізняється вмістом в ньому хімічних елементів (кремнію, марганцю, фосфору та ін.). Готовий чавун має точно встановлений хімічний склад, який визначається величинами H_j що є частками (у відсотках) j -ого хімічного елементу в готовому продукті. При цьому відомі величини: h_{ij} — вміст (у відсотках) j -го хімічного елементу в i -му початковому шихтовому матеріалі; c_i — ціна одиниці кожного i -го шихтового матеріалу. Обчислити склад шихти, що сприяє отриманню литви заданої якості при мінімізації загальної вартості використаних шихтових матеріалів.

3. Задача про найкращу програму перевезень

Цю задачу часто називають транспортною. У простішому варіанті транспортна задача виникає при необхідності найбільш раціонального перевезення деякого однорідного вантажу. При цьому споживачам байдуже, з яких пунктів він надходить, важливо, щоб був задоволений попит, а кожен постачальник має можливість постачати вантаж будь-якому споживачу. Зворотні перевезення не передбачаються.

Приклад 5. На трьох точках відправлення знаходиться певний вантаж у відповідних кількостях 420, 380 і 400 т. Даний набір потрібно доставити в три точки призначення у відповідних кількостях 260, 520 і 420 т. Ціна перевезень 1 т вантажу з кожної точки відправлення в кожну точку призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Сформулювати план перевезень, що покриває експорт існуючого в точках відправлення і доставлення потрібного в точки призначення вантажу при найменшій загальній вартості перевезень.

4. Задача про оптимальне розташування підприємства

Це одна з важливих модифікацій транспортної задачі.

Приклад 6. Підприємства можуть знаходитися у m пунктах, які здійснюють виробництво певної однорідної продукції. Дана продукція розповсюджується у n пунктів її споживання, причому в j -му пункті потреби в продукції рівні a_j одиницям. Затрати, спричиненні доставкою одиниці продукції з i -го пункту відправлення в j -й пункт споживання, становлять c_{ij} грн. Відомо, що в i -му пункті виготовлення продукції максимальний об'єм її виробництва не може перевищувати b_i одиниць, а витрати, пов'язані з виготовленням одиниці продукції, становлять d_i грн. Встановити таке розміщення підприємств, при якому забезпечуються потреби в продукції у кожному з пунктів її споживання при як найменших загальних затратах, пов'язаних із виготовленням і доставкою продукції.

5. Задача про доцільний покрій матеріалів

Модель даної задачі займає вагоме місце у економії матеріалів та сировини.

Приклад 7. Для пошиття відповідних елементів швейних виробів в цеху фабрики тканину розрізають кількома способами. При j -му різновиді розкрою ($j = \overline{1, n}$) 100 м^2 тканини виробляється b_{ji} деталей i -го виду ($i = \overline{1, m}$), а мірки відрізків при такому різновиді розкрою становить $c_j \text{ м}^2$. Так, деталей i -го виду

необхідно виробляти B_j штук, тому варто покроїти тканину так, щоб одержати потрібну кількість деталей кожного виду при найменших сукупних відходах. Сформулюйте математичну модель задачі.

6. Задача динаміки виробництва і створення запасів

Ця задача полягає в оптимальному розподілі деякої продукції та її запасів. В умовах діючого підприємства всяка зміна об'єму випуску продукції зв'язана з додатковими витратами. Зберігання готової продукції також вимагає певних витрат. У випадках, коли попит на готову продукцію в окремі відрізки часу не постійний, виникає потреба пошуку такого компромісного плану випуску, при якому сумарні затрати на розширення і згортання виробництва, а також на зберігання залишків продукції були б мінімальними за умови вчасного і абсолютного задоволення потреб.

7. Стохастична задача комплектування станочного парку

Приклад 8. На авторемонтний завод протягом деякого відрізка часу надходять замовлення на виконання ремонтних робіт. Наперед невідомі час надходження замовлень і їх кількість. Однак зрозуміло, що якщо верстатів для виконання різноманітних замовлень недостатньо, то це призведе до затримки у здійсненні ремонту, а замовники звернуться за послугами до інших, більш укомплектованих підприємств, і даний завод зазнає збитків через недоотримання прибутку.

З іншої сторони, якщо набір різних верстатів занадто розширити, то більшу частину часу вони будуть простоювати, а завод, витративши гроші на їх закупівлю, змушений буде і далі терпіти збитки через утримування надлишкової кількості оснащення.

У даному випадку прибуток, що отримує завод, є випадковою величиною, а тому говорити про його максимізацію немає сенсу. Тому на практиці як цільова функція вибирається або математичне сподівання прибутку, обчислене на основі відомих ймовірностей надходження замовлень (цей випадок зводиться до звичайної задачі лінійного програмування), чи ймовірності того,

що розмір доходу буде не меншим заданої величини (тут потрібні спеціальні методи досліджень).

1.3. Методи знаходження розв'язку задач

Основна задача лінійного програмування полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ за умов } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i (i=1, m), x_j \geq 0 (j=1, n).$$

Знайдемо максимум функції, представивши задачу у векторній формі

$$F = CX \quad (к)$$

за умов

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + K + x_n P_n = P_0, \quad (л)$$

$$x \geq 0, \quad (м)$$

де $C = (c_1; c_2; K; c_n)$, $X = (x_1; x_2; K; x_n)$; CX – скалярний добуток; $P_1, P_2; \dots; P_n$, і P_0 – m -вимірні вектор-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь задачі:

$$P_0 = (b_1 | \dots | b_m | \dots | b_m) \quad P_1 = (a_{11} | \dots | a_{m1} | \dots | a_{m1}) \quad P_2 = (a_{12} | \dots | a_{m2} | \dots | a_{m2}) \quad \dots$$

$$P_n = (a_{1n} | \dots | a_{mn} | \dots | a_{mn})$$

Якщо система векторів P_j , $X = (x_1; x_2; K; x_n)$ є опорним.

Вектори P_j є m -вимірними, то число позитивних компонент опорного плану не може бути більше, ніж m .

Опорний план являється невиродженим, коли до його складу входить рівно m позитивних компонентів, в іншому випадку він називається виродженим.

Ознаки основної задачі лінійного програмування (к) – (м) щільно прив'язанні до ознак опуклих множин.

Припустимо, що X_1, X_2, K, X_n – довільні точки евклідового простору E_n , тоді сума $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$, де α_i — довільні невід'ємні числа, причому сума яких дорівнює 1, складає опуклу лінійну комбінацію цих точок:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 (i = \overline{1, n}).$$

Кутова точка X опуклої множини не представляється у вигляді опуклої лінійної комбінації яких-небудь двох других різних точок даної множини.

Теорема 1. Множина розв'язків сукупної задачі лінійного програмування є опуклою (якщо вона не порожня).

Непорожня множина розв'язків сукупної задачі лінійного програмування будується у вигляді многогранника розв'язків, а всяка кутова точка многогранника розв'язків є його вершиною.

Теорема 2. Якщо для основної задачі лінійного програмування можна віднайти найкращий план, то найбільше значення цільова функція задачі приймає в одній з вершин многогранника рішень. Якщо ж максимального значення цільова функція задачі набуває у кількох вершинах, то вона приймає його у кожній точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема 3. Якщо система векторів $P_1, P_2, K, P_k (k \leq n)$ в розкладі (л) лінійно незалежна і така, що

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + K + x_n P_n = P_0, \quad (H)$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X=(x_1; x_2; K; x_k; 0)$ є вершиною многокутника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X=(x_1; x_2; K; x_n)$ — вершина многокутника розв'язків, то вектори P_j , що відповідають додатним x_j в розкладі (л), лінійно незалежні.

Непорожня множина розв'язків основної задачі лінійного програмування створює опуклий многогранник. Будь-яка вершина даного многогранника представляє опорний план. В одній із вершин многогранника розв'язків (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є найбільшим (за умови, що функція обмежена зверху на множині планів). Якщо найбільше значення функція приймає більш ніж в одній вершині, то цього ж значення вона приймає в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину многогранника розв'язків, у якій цільова функція приймає найбільшого значення, визначити відносно легко, якщо задача, подана у формі стандартної та включає не більше двох змінних, або якщо задача, подана у формі основної, включає не більше двох вільних змінних.

Відшукаємо розв'язок задачі, яка базується у визначенні найбільшого значення функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (o)$$

за умов

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, (i = \overline{1, k}), \quad (п)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2). \quad (р)$$

Кожна з нерівностей (п), (р) системи обмежень задачі геометрично з'ясовує напівплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i, (i = \overline{1, k}), x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Якщо система нерівностей (п), (р) сумісна, областю її розв'язків є множина точок, що припадає усім вказаним напівплощинам. Оскільки множина точок перетину даних напівплощин опукла, то областю допустимих розв'язків задачі (о) – (р) є опукла множина, яка являє собою багатокутник розв'язків (введений раніше термін „многогранник розв'язків” звичайно використовується, якщо $n \geq 3$). Сторони цього многокутника розміщені на прямих, рівняння яких одержуються з початкової системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки точної рівності.

Отже, сутність початкової задачі лінійного програмування розкривається у відшуванні такої точки многокутника розв'язків, в якій цільова функція F приймає найбільшого значення. Таку точку можна побудувати, коли многокутник розв'язків не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху і, в такому випадку, цільова функція приймає найбільшого значення. Для знаходження оцієї вершини створюємо лінію рівня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = h$ (де h — деяка стала), яка переходить через многокутник розв'язків, та переміщуватимемо її у напрямі вектора $\bar{c} = (c_1, c_2)$ доти, поки вона не перетне останню її спільну точку з многокутником розв'язків. Координати даної точки і окреслюють оптимальний план даної задачі.

Завершуючи опис геометричної інтерпретації задачі (о) – (р), замітимо, що при відшуванні її розв'язку необхідно розглянути випадки, зображені на рис. 1.1–1.4. Рис. 1.1 описує задачу, коли цільова функція приймає найбільшого значення в єдиній точці А. З рис. 1.2 можна стверджувати, щонайбільшого

значення цільова функція приймає в кожній точці відрізка АВ. На рис. 1.3 описана задача, в якій цільова функція не обмежена зверху на множині допустимих розв'язків, а на рис. 1.4 — задача, в якій система обмежень задачі несумісна.

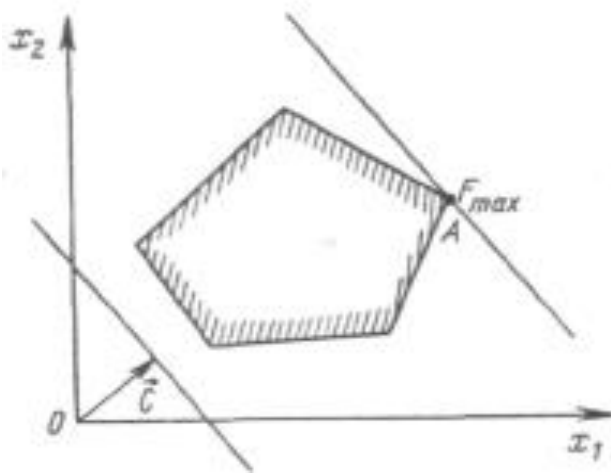


Рис.1.1

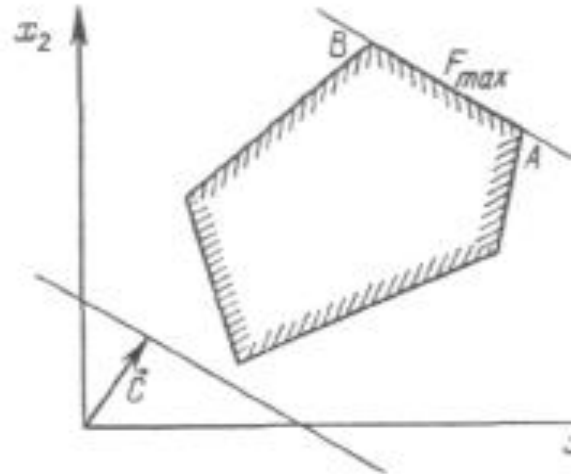


Рис.1.2

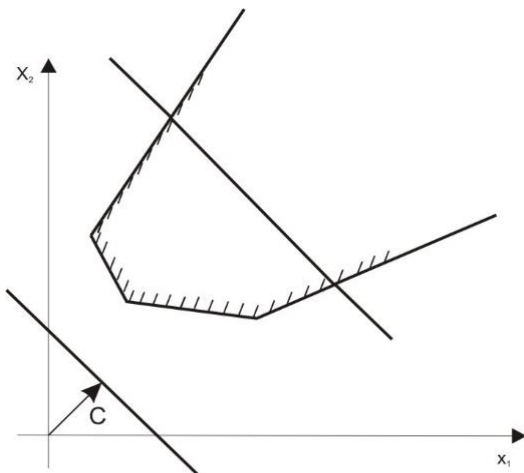


Рис. 1.3

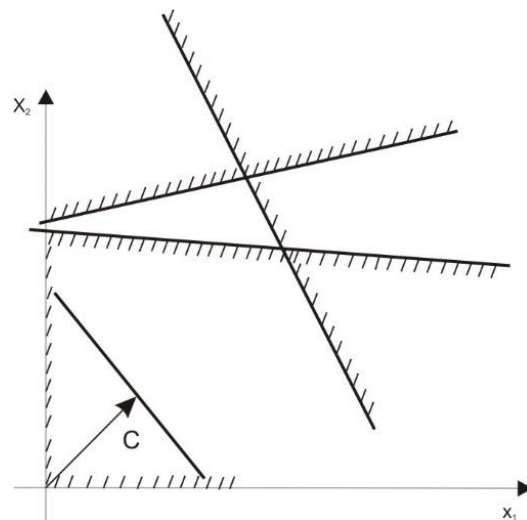


Рис. 1.4

Зауважимо, що визначення найменшого значення лінійної функції при даній системі обмежень розбігається із визначенням її найбільшого значення за тих же обмежень лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ переміщається не у напрямі вектора $\bar{c} = (c_1, c_2)$, а в протилежному напрямі. Отже, описані вище випадки, які трапляються при визначенні найбільшого значення цільової функції, актуальні і при знаходженні її найменшого значення.

З вище сказаного випливає, визначення розв'язку задачі лінійного програмування (о) – (р) на основі її геометричної інтерпретації здійснюється такими етапами:

1. Побудувати прямі, рівняння яких одержали в результаті заміни в обмеженнях (п) і (р) знаків нерівностей на знаки точної рівності.
2. Визначити напівплощини, що окреслюються кожним з обмежень задачі.
3. Визначити багатокутник розв'язків.
4. Побудувати вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$.
5. Побудувати пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, яка пролягає через багатокутник розв'язків.
6. Перемістити лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ у напрямі вектора $\bar{c}$. Остання спільна точка (точки) лінії рівня і багатокутника розв'язків і є точкою, в якій цільова функція приймає найбільшого значення чи розкривають необмеженість зверху функції на множині розв'язків.
7. З'ясувати координати точки максимуму функції і обрахувати значення цільової функції в цій точці.

Приклад 9. Визначити найбільше і найменше значення функції $F = x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Створимо багатокутник розв'язків (рис. 1.5).

Як видно з рис. 1.5, багатокутником розв'язків став трикутник ABC. Координати точок цього трикутника відповідають умові невід'ємності і нерівностям системи обмежень задачі. Тому, задача одержить розв'язок, якщо серед точок трикутника ABC визначити такі, в яких функція $F = x_1 + x_2$ приймає найбільшого і найменшого значення. Для визначення такої точки накреслимо пряму $x_1 + x_2 = 4$ і вектор $\bar{c} = (1; 1)$.

Рухаючи дану пряму у напрямі вектора $\vec{c}$ паралельно самій собі, дізнаємося, що її фінальною спільною точкою многокутником розв'язків задачі є точка С. Звідси, в даній точці функція приймає найбільше значення. З рисунка видно, що точка С є перетином прямих, то її координати справедливі для рівнянь цих прямих:

$$\{2x_1 + 4x_2 = 16, |$$

Знайшовши розв'язки цієї системи рівнянь, одержимо $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. Таким чином, найбільше значення функції $F_{max} = 7$.

Для визначення найменшого значення цільової функції задачі рухаємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ в напрямку, протилежному напрямку вектора $\vec{c} = (1; 1)$.

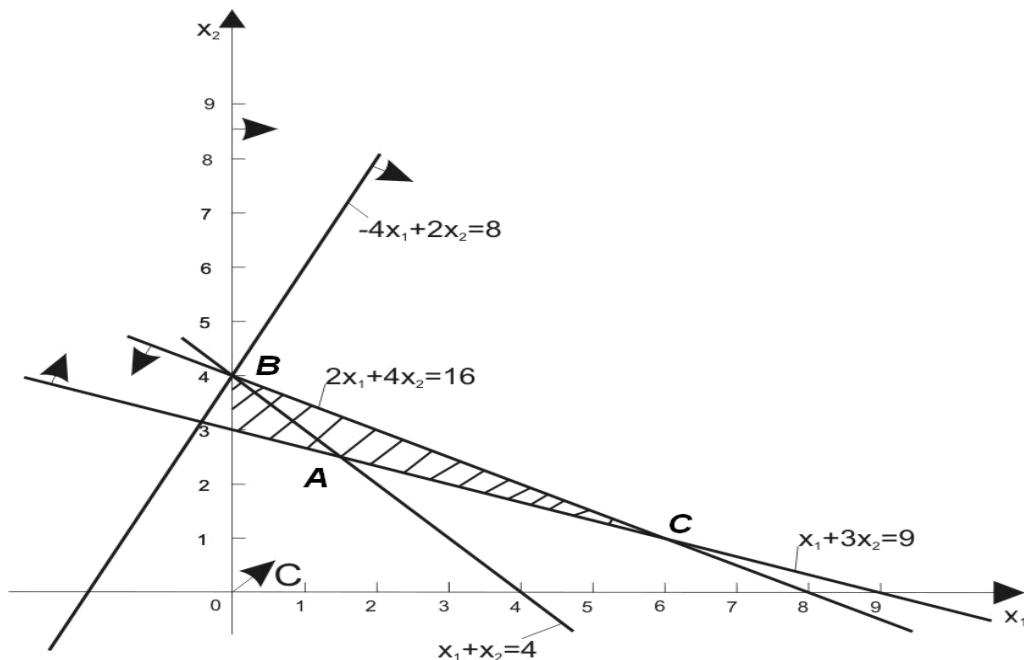


Рис. 1.5. Побудова многогранника розв'язків для прикладу 9

Для визначення координат точки А знаходимо розв'язки для системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Звідси, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Підставляючи знайдені значення змінних у цільову функцію, отримаємо $F_{min} = 3$.

Приклад 10. Визначити найбільше значення функції

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \text{ за умов}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. На відміну від розглянутих вище задач, у даній задачі обмеження, представлені рівняннями. При цьому число невідомих дорівнює п'яти. Тому дану задачу потрібно звести до задачі, в якій число невідомих дорівнювало б двом. Переведемо задану задачу у формі основної до задачі у стандартній формі:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Із цільової функції початкової задачі змінні x_3, x_4, x_5 виключені за допомогою підстановки їх значень із відповідних рівнянь системи обмежень.

Збудуємо многокутник рішень отриманої задачі (рис. 1.6).

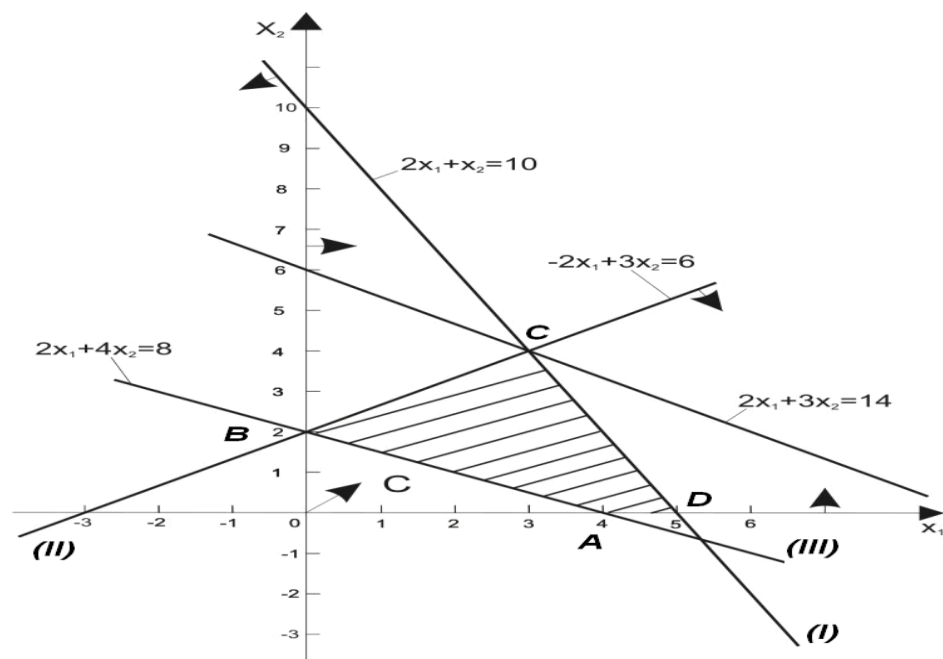


Рис. 1.6. Побудова многогранника рішень для прикладу 10.

7. З'ясувати координати точки максимуму функції і обрахувати значення цільової функції в цій точці.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Технологія знаходження розв'язку задачі лінійного програмування за підтримки сучасних систем комп'ютерної математики

Вивчаючи питання застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освіті, потрібно відзначити, обсяг знань постійно збільшувався, а технології передачі інформації протягом століття залишалися незмінними – єдиним носієм інформації залишався вчитель. Неупереджені закони розвитку сучасного суспільства вимагають нові установки до змісту й передачі знань, які змушують науковців активізує пошуки у цьому напрямі. Через що більшість вчених заговорили про впровадження інформаційно-комунікаційних технологій під час проведення уроків математики. Використання засобів динамічного моделювання у процесі вивчення лінійного програмування в школі, обираючи завдання відповідно до індивідуальної освітньої програми учня, сприяє підвищенню інтересу до навчання математики та й розвиває математичну інтуїцію. Доцільний добір динамічних моделей з урахуванням вікових особливостей підопічного надасть вчителю нові можливості для виконання його освітнього запиту щодо ефективного навчання математики.

Насамперед, якщо йде мова про застосування інформаційно-комунікаційних технологій та математики, то безумовно це використання засобів комп'ютерної математики. Вони дозволяють виконувати різні математичні операції та перетворення алгебраїчних виразів заданих в чисельній та символній (змінні, функції, поліноми, матриці тощо) формах. Наприклад: MathCad, MatLab, Gran (1-3), Maxima, MathPaper тощо. В даний час існує велика кількість онлайн програм, які допомагають при здійсненні обчислень, побудові графіків, моделей та інших математичних об'єктів. Для прикладу можна назвати обчислювальний онлайн засіб WolframAlpha. Деякі математичні пакети зустрічаються як в онлайн, так і в інсталюваній версії (GeoGebra).

WolfrAlpha – англomовний безкоштовний обчислювальний онлайн рушій, що генерує відповіді у режимі реального часу, здійснюючи обчислення і пошук даних по всьому великому фонді знань, що охоплює інформацію з математики, фізики, астрономії, хімії, біології, медицини, історії, географії, політики, музики, кінематографії та ще дані про видатних людей й інтернет-сайти. У навчанні математики він допоможе знайти теоретичні й історичні відомості з предмету, дані наукових експериментів за темами, створити візуальні засоби для презентацій і роздаткових матеріалів, намалювати графік функції (рис. 2.1), надати покрокове розв’язання прикладу. Отже, WolfrAlpha можна використовувати для призначення завдань на основі інформації, що міститься у ньому, для науково-дослідних робіт і проектів.

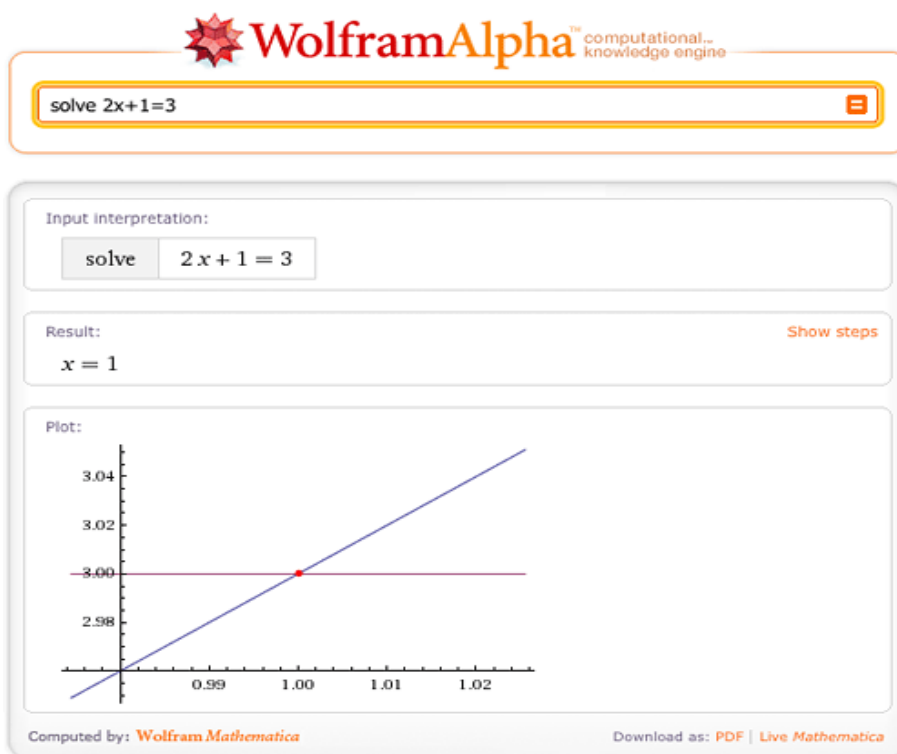


Рис. 2.1. Побудова графіку функцій у WolfrAlpha

У роботі з цим ресурсом для вчителя відкривається багато можливостей для того, щоб надати своєму учневі уявлення про практичне значення математичних розрахунків і мотивувати його до вивчення математики як життєво необхідного предмету. Наприклад, підрахунок калорій, малювання графіку у вигляді серця або котиків за допомогою використання математичних

кривих. Учень може ефективно обробляти великі масиви даних та систематизувати їх у вигляді різних графіків, діаграм і таблиць, що допоможе засвоєнню статистичних методів аналізу даних.

Махіма являє собою систему комп'ютерної алгебри для роботи з символьними та чисельними виразами. Програма охоплює набір інструментів для диференціювання, інтегрування, розкладання в ряд, перетворення Лапласа, знаходження розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, систем лінійних рівнянь тощо. В системі Махіма можна здійснювати чисельні розрахунки високої точності, застосовуючи цілі числа, точні дробу або числа з плаваючою точкою довільної точності. Крім того в програмі є можливість побудувати 2-х та 3-х вимірні графіки функцій або статистичних даних.

Основні особливості:

- роботи з символьними та чисельними виразами
- здійснення різних типів розрахунків
- Можливість побудувати 2-х та 3-х вимірні графіки

Для визначення розв'язку задачі лінійного програмування із застосуванням Махіма необхідно:

- загрузити пакет симплекса `load("simplex")`, адже обчислення відбувається за алгоритмом симплекс-методу;
- застосувати функцію `maximize_lp(obj, [cond])` для знаходження максимального значення (`minimize_lp(obj, [cond])` для визначення найменшого значення) цільової функції `obj`;
- за підтримки `cond` задати систему обмежень, змінивши знаки $\leq$ на $<$, $\geq$ на $>$; установити перемикач `nonnegative_pl` зі значенням `true`, якщо усі значення x_j вводяться невід'ємними;
- якщо отримали розв'язок задачі, то на екрані появляється перелік, який відображає найбільше (найменше) значення цільової функції, а також показує значення змінних, котрим був досягнутий результат (рис. 2.2).

У програмі комп'ютерної алгебри Махіма для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом спершу потрібно

завантажити пакет створення графіків функцій, визначених неявно, із використанням команди `load(implicit_plot)`. Подальшим кроком стане побудова кожного з рівнянь граничних прямих та графіка цільової функції. Умовиводи щодо отримання найкращого розв'язку необхідно зробити, спираючись на знання теоретичного матеріалу щодо геометричної інтерпретації цієї задачі.

```
(%i1) eq1:x+2*y+3*z+4*k+5*m=13;eq2:2*x+y+2*z+3*k+4*m=10;
      eq3:2*x+2*y+z+2*k+3*m=11;eq4:2*x +2*y+2*z+k+2*m=6;
      eq5:2*x+2*y+2*z+2*k+m=3;

(%o1) 3 z +2 y +x +5 m +4 k =13
(%o2) 2 z +y +2 x +4 m +3 k =10
(%o3) z +2 y +2 x +3 m +2 k =11
(%o4) 2 z +2 y +2 x +2 m +k =6
(%o5) 2 z +2 y +2 x +m +2 k =3
```

Рис. 2.2. Знаходження розв'язку задачі лінійного програмування в Maxima

Наступною розглянемо технологію отримання розв'язку задачі лінійного програмування за підтримки табличного процесора. Microsoft Excel володіє спеціальним інструментом для пошуку розв'язків оптимізаційних задач – «Пошук розв'язку», котрий відшуковує значення цільової функції багаторазово, перетворюючи значення змінних на малу величину. Розглянемо алгоритм отримання розв'язків задачі лінійного програмування за підтримки Microsoft Excel (рис.2.3):

- створити комірки для шуканого розв'язку x ;
- заповнити комірки коефіцієнтів цільової функції c_j ;
- створити формулою цільову функцію $z(x)$;
- заповнити комірки матриці коефіцієнтів a_{ij} системи обмежень;
- заповнити комірки стовпця вільних членів b_i системи обмежень;
- створити формулами систему обмежень;
- запустити інструмент «Пошук розв'язку» у вкладці «Дані»;
- заповнити діалогове вікно «Параметри пошуку розв'язку»

відповідними даними:

- у полі «Оптимизировать целевую функцию» («Оптимізувати цільову функцію» записати адресу цільової комірки, в якій наведена формула;
- вибрати дію, котру потрібно здійснити над цільовою функцією: віднайти максимум, мінімум чи задати деяке значення;
- у графі «Змінюючи клітинки зі змінними» підтвердити адреси комірок шуканого розв'язку;
- у графі «В соответствии с ограничениями» («Відповідно до обмежень») створити систему обмежень, застосувавши кнопки «Добавить»;
- відмітити пункт «Зробити змінні без обмежень невід'ємні», узгодивши з умовою загальної постановки завдання;

[illegible]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$x'' =$								$\Pi\Phi$
2	$c_j =$	15	-14	1	1	-3			0
3									
4									
5									
6									
7	$a_{ij} =$	2	-5	2	-4	4			0
8		-2	8	1	1	5			0
9		-1	4	1	2	0			0

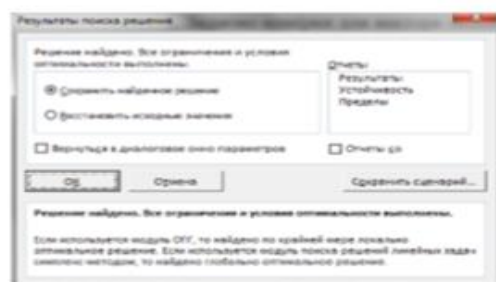
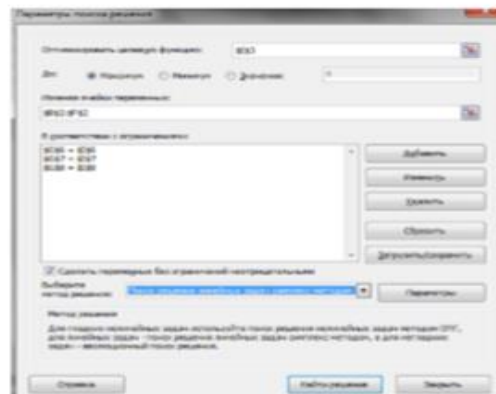
[illegible]

Рис. 2.3. Знаходження розв'язку задачі лінійного програмування в Microsoft Excel

- вибрати прийом отримання розв’язків для задачі лінійного програмування «Пошук розв’язку лінійних задач симплекс-методом, після чого натиснути кнопку «Знайти розв’язок»;
- після завершення функції інструментом «Пошук розв’язку» з’явиться вікно «Результати пошуку розв’язку»; після здійснення команди

«Ок» у відповідних комірках появиться оптимальне значення цільової функції та значення змінних, для яких воно досягається;

- якщо обрати інструмент «Результати» в переліку «Звіти», то буде створено лист з глибоким аналізом одержаних результатів задачі.

Характерною рисою комп'ютерного моделювання задачі лінійного програмування в Microsoft Excel доцільно замітити динамічність процесу. Кожна зміна, зроблена в таблиці, моментально появляється на екрані.

Щоб знайти розв'язок задачі треба:

- вхідні дані (лінійну функції та систему обмежень) ввести в таблицю;
- ввести число n (кількість проміжків на осі) щоб побудувати графіки функції;
- підрахувати граничні значення діапазону $x_1 \in [a, b]$ і крок h_{x_1} щоб збудувати графіків функцій;
- накреслити таблицю зі значеннями: аргументу x_1 , функцій обмежень та цільової функції;
- за табличними даними збудувати многогранник можливих рішень задачі, відтінивши його товстими лініями;
- створити пунктирну копію лінії цільової функції й паралельним її перенесенням з'ясувати крайню точку її дотику з областю можливих рішень, де цільова функція набуває максимального значення; відшукати значення цільової функції для знайденої точки оптимуму.

Отже, застосування програмних засобів створює шанс майже моментально одержати розв'язок задачі лінійного програмування, розширює інформативну компетентність, проте нема можливості закріпити практичні навички рішення даної задачі.

Програмно-методичний комплекс GRAN, який складається із ряду педагогічних програмних засобів GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, став опорою при вивченні математики (планіметрії, стереометрії, тригонометрії, алгебри і

початків аналізу, початків теорії ймовірностей і математичної статистики), а також окремих розділів фізики в школі (7–11 класи).

GRAN1 передбачений для графічного аналізу функцій, про що й засвідчує його назва G^Raphic ANalysis (рис. 2.4). Запуск програми відбувається звичним прийомом: Пуск -GRAN1 - GRAN1 або з застосуванням ярлика. Вслід за цим на екрані з'являється вікно програми, в якому знаходиться три внутрішніх вікна: Графік, Список об'єктів, Відповіді.

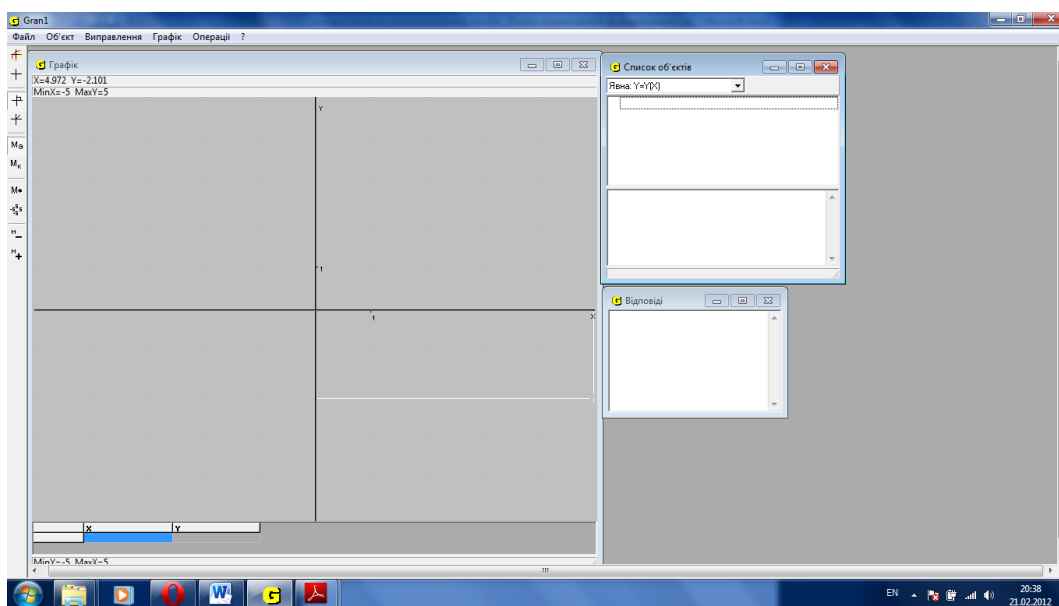


Рис. 2.4. Інтерфейс програми GRAN1

У верхньому рядку вікна програми міститься Рядок заголовка, нижче – Рядок меню. В програмі представлена контекстна довідка, для роботи з якою необхідно обрати відповідну команду і натиснути клавішу F1. У вікні Графік створюються графічні зображення об'єктів і графіків функцій, відбиваються пояснювальні написи тощо.

Алгоритм знаходження розв'язку задачі лінійного програмування при застосуванні GRAN1:

- побудувати математичну модель у вигляді системи нерівностей;
- вибрати тип функції $G(x, y)=0$;

- збудувати вектор-градієнт $\overrightarrow{grad} = (c_1, c_2)$, який показує напрямок зростання значень цільової функції $z(x)$;
- збудувати пряму $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = const$, яка є перпендикулярною до вектора-градієнта;
- переміщати пряму $Z = const$ паралельно самій собі в напрямку вектора-градієнта $\overrightarrow{grad}$ для задач максимізації функції $z(x)$ і в протилежному напрямку для задач мінімізації функції $z(x)$ доки вона не досягне крайньої точки області допустимих розв'язків (вершину або грань многогранника), найбільш віддалену (найменш віддалену – у випадку мінімуму $z(x)$) від початку координат;
- означити координати точки, у якій цільова функція $z(x)$ приймає максимального (мінімального значення).

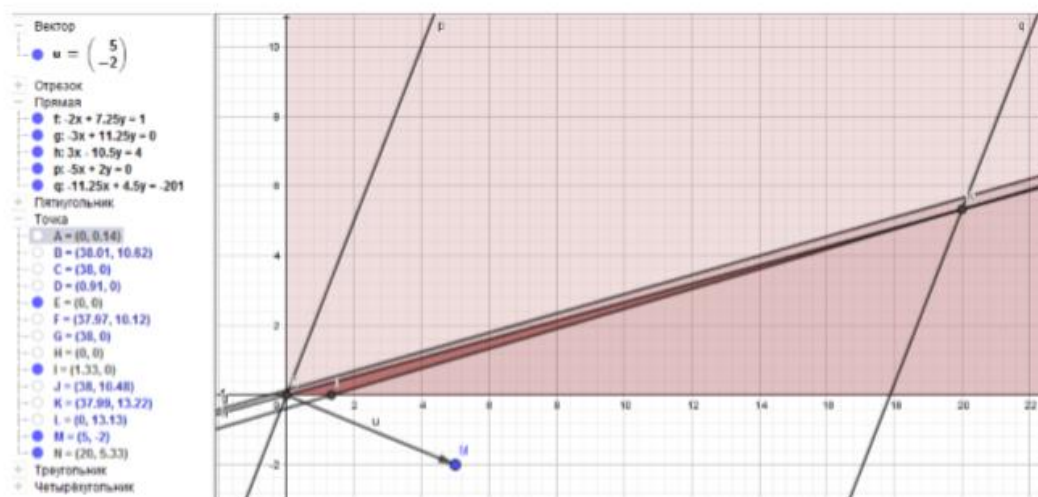


Рис. 2.6. Знаходження розв'язку задачі лінійного програмування в GeoGebra

Проте, при рішенні задач лінійного програмування графічним методом потрібно враховувати певні особливості побудови алгоритму в залежності від вибраного програмного засобу.

2.2. Опис та характеристика системи динамічної математики

GeoGebra

На сьогоднішній день введення в освітній процес сучасних інформаційно-комунікаційних технологій є запорукою зростання його ефективності. Особливо актуальним є питання впровадження комп'ютерних засобів на уроках математики в старших класах, зокрема, у класах математичного спрямування. За підтримки інформаційно-комунікаційних технологій доступнішим стає вивчення таких тем, як створення графіків функцій та їх обмежень, знаходження розв'язку систем рівнянь і нерівностей, обчислення площ фігур, побудова перерізів геометричних тіл, обрахунків об'ємів тіл обертання тощо. Використовування інформаційно-комунікаційних технологій сприяє посиленню навчального інтересу та активізації пізнавальної діяльності учнів, підвищує наочність і доступність навчального матеріалу, посилює мотивацію та інтерес до вивчення математики тощо. Одним із засобів інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики, рекомендованих навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти, є система динамічної математики GeoGebra. Функціональні можливості програми та потужна веб-підтримка користувачів GeoGebra надають можливість ефективно її використовувати при вивченні переважної більшості теоретичного та практичного матеріалів основного курсу математики. Вагомим фактором її використання є те, що програма має чималий набір інструментів для створення динамічних комп'ютерних моделей математичних об'єктів, який дає можливість застосовувати її не тільки для рішення математичних задач, а і для організації евристичного навчання, формування вмінь та навичок дослідницької діяльності, розвитку творчих здібностей учнів, створення динамічних наочних посібників тощо.

Система динамічної математики GeoGebra (СДМ GeoGebra) – це незалежний педагогічний програмний засіб передбачений для вивчення і викладання математики у загальноосвітніх і вищих навчальних закладах, що суміщає динамічну геометрію, алгебру, математичний аналіз, фізику та статистику. Засновниками даної програми стали Маркус Хохенвартер і міжнародна команда програмістів. GeoGebra є новітнім продуктом, при

створенні якого застосовувалися останні досягнення в галузі інформаційних технологій і до тепер проводиться активна робота над її розвитком та вдосконаленням.

Система динамічної математики GeoGebra застосовується при вивченні математики, фізики та інших навчальних дисциплін у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах багатьох країн світу. Для прикладу можна назвати Австрію, Польщу, Німеччину, Великобританію, Канаду, США, Італію, Іспанію, Норвегію, Фінляндію, Швецію, Австралію.

Програма GeoGebra була розроблена з ціллю поєднання можливостей програм динамічної геометрії (наприклад: Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad) і систем комп'ютерної алгебри (наприклад: Derive, Maple) в одній простій у застосуванні системі, призначеній для вивчення і викладання математики. Протягом останніх років GeoGebra змінилась на інтернаціональний проект з відкритим кодом, яка активно удосконалюється професійною міжнародною командою з 20 розробників та більше ніж 100 перекладачів. Остання стабільна версія GeoGebra являє собою кілька динамічно з'єднаних між собою представлень математичних об'єктів: графічне, алгебраїчне та табличне. Варто зазначити, що в процесі удосконалення програми, із збільшенням її функціональних можливостей інтерфейс GeoGebra лишається простим у застосуванні й інстинктивно доступним. Саме цей підхід становить основу концепції подальшого розвитку програми. Система GeoGebra доступна більше ніж 50 мовами світу, отримала кілька нагород освітніх програм у Європі та США (наприклад, EASA 2002, digita 2004, Comenius 2004, eTwinning 2006, AECT 2008, BETT 2009 finalist, Tech Award 2009, NTLC Award 2010, MERLOT Classics Award 2013, Microsoft Partner of the Year Award 2015, Archimedes 2016).

Пакет динамічної математики GeoGebra – це:

- інтерактивна графіка, алгебра та електронні таблиці;
- комп'ютерна підтримка навчання математики та інших предметів від початкової школи до університету;

- можливість вільного доступу (файлове сховище, GeoGebraTube) до навчальних матеріалів.

Вагомим є те, що для забезпечення підтримки користувачів GeoGebra, створення умов для їх співпраці та обміну досвідом побудовані потужні Інтернет-ресурси із застосуванням сучасних веб-технологій (Веб 2.0, хмарних обчислень, Вікі-технологій). На ресурсі www.geogebra.org постійно оновлюється база методичних і дидактичних матеріалів у вільному доступі, діє активний форум користувачів, на якому учні, студенти, вчителі, викладачі, освітяни можуть спілкуватися та ділитися своїми доробками, дізнаватися останні новини щодо заходів та подій у спільноті користувачів GeoGebra з різних куточків світу.

Було написано платформу GeoGebraTube з метою удосконалення сервісу для зберігання, перегляду, використання та обміну електронними відкритими дидактичними матеріалами, зробленими за допомогою GeoGebra, (<http://www.geogebraTube.org>). У користувачів є можливість залишати коментарі й давати оцінку якості розміщених матеріалів. Враховуючи стрімке збільшення об'єднань довкола GeoGebra, необхідно забезпечити професійну, як членам співтовариства, так і вчителям, котрі тільки почали розглядати можливості роботи з GeoGebra в навчальному процесі. Саме з ціллю поглиблення досліджень і наступного удосконалення системи динамічної математики GeoGebra, на конференції в Кембриджі у травні 2008 року засновано інтернаціональну професійну мережу: Міжнародний Інститут GeoGebra (International GeoGebra Institute, IGI). Система GeoGebra володіє засоби для інтеграції із сучасними веб-технологіями (Веб 2.0, Веб 3.0, хмарні обчислення, Вікі-технології, Moodle), що дає можливості для використання GeoGebra з метою інтернет-підтримки навчально-виховного процесу, а також для застосування в процесі створення дистанційних форм навчання математики.

В Україні започатковано регіональні інститути GeoGebra: «Інститут GeoGebra Харків, Україна» (засновано 6 липня 2010 року на базі кафедри інформатики Харківського національного педагогічного університету імені Г.

С. Сковороди) та «Інститут GeoGebra Чернігів, Україна» (засновано 3 лютого 2011 року на базі Чернігівського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти (ЧОППО) імені К. Д. Ушинського)

Головні завдання центрів:

- організація семінарів і конференцій;
- розроблення новітніх та апробація діючих навчальних матеріалів відповідно до українських освітніх стандартів;
- написання веб-ресурсів для підтримки застосування GeoGebra в навчальних закладах України;
- організації досліджень із залученням вчителів і викладачів до наукової роботи;
- створення спільноти сертифікованих користувачів і тренерів GeoGebra у Чернігівській області і в Україні;
- залучення вчителів і учнів до роботи центру.

Функціональні можливості GeoGebra полягають у миттєвому створенні високоякісних графічних зображень математичних об'єктів, зберіганні зображень у файлах графічних форматів (png; svg) або експортування до буфера обміну, у використанні отриманих рисунків для створення друкованих дидактичних матеріалів, мультимедійних презентацій.

Зокрема, для алгебри і початків аналізу можна виокремити такі напрями:

- знаходження значення виразів;
- спрощення дробово-раціональних виразів;
- розкладання на множники многочленів;
- розкладання на прості множники числа;
- обчислення НСД і НСК декількох чисел;
- побудова графіків функцій і рівнянь, заданих аналітично;
- графічне розв'язування рівнянь і їх систем;
- знаходження координат точок перетину графіків двох функцій на заданому проміжку;

- графічне розв'язування нерівностей і їх систем;
- побудова дотичної і нормалі до графіка функції у заданій точці з одночасним знаходженням їх рівнянь;
- трасування графіка, побудова таблиці значень;
- дослідження функції на даному проміжку (відшукування найбільших і найменших значень, екстремум, довжина кривої, нулі функції, точки перегину (для поліномів);
- виконання чисельного інтегрування і його геометрична ілюстрація;
- знаходження первісної, похідної функції та побудова їх графіків.

Для роботи з геометрії в програмі наданні такі можливості:

- побудова різноманітних геометричних фігур на площині (точок, прямих, променів, ламаних, векторів, кутів, багатокутників, правильних багатокутників, бісектрис кутів, серединних перпендикулярів, паралельних і перпендикулярних прямих, кіл (за центром і точкою, за центром і радіусом, за трьома точками), дуг кіл і конічних перетинів, дотичних до кола тощо);
- обчислення площ: багатокутника, круга, частини площини, обмеженої еліпсом, сектора;
- знаходження: градусної міри кута, довжини відрізка, периметра багатокутника, довжини вектора, відстані від точки до прямої, тангенса кута між прямою і додатнім напрямком осі абсцис тощо;
- перетворення фігур на площині: симетрія відносно точки і прямої, поворот навколо точки, гомотетія, паралельне перенесення;
- знаходження точок перетину двох фігур (двох прямих, прямої і кола);
- знаходження середини відрізка, центра кола (еліпса).

Отже, GeoGebra - це безкоштовна математична програма для розробки інтерактивних (живих) моделей, Інтернет-сторінок та застосування їх у навчанні. Вона завжди доступна на www.geogebra.org. GeoGebra спрощує побудову математичних моделей, що дозволяє супроводжувати інтерактивні дослідження при переміщенні об'єктів і зміні параметрів.

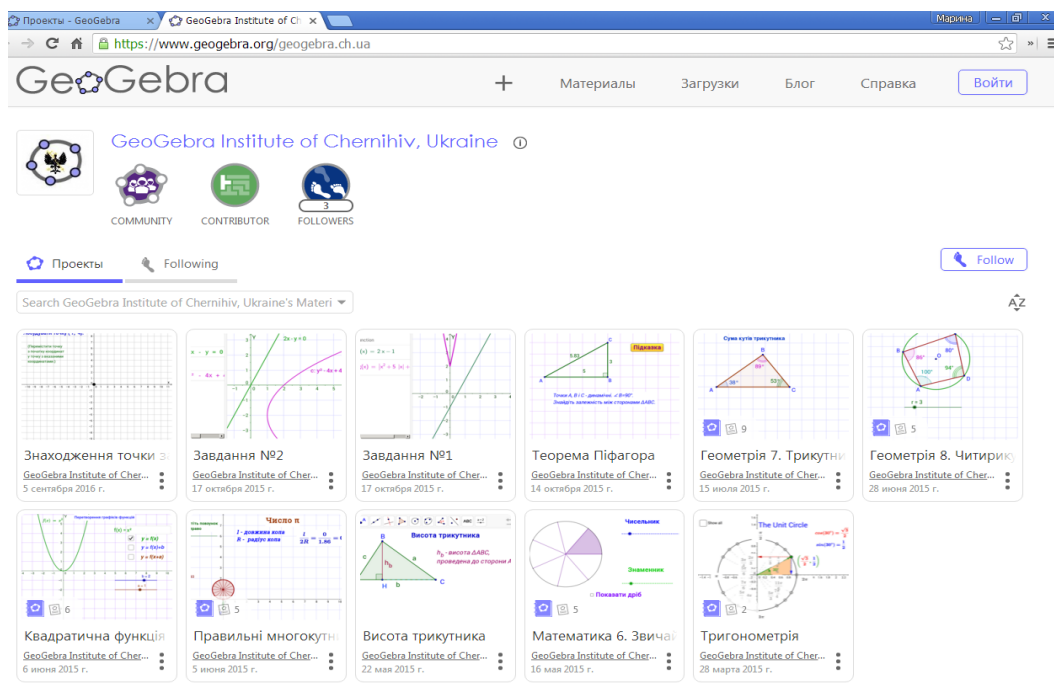


Рис. 2.7. www.geogebra.org/geogebra.ch.ua

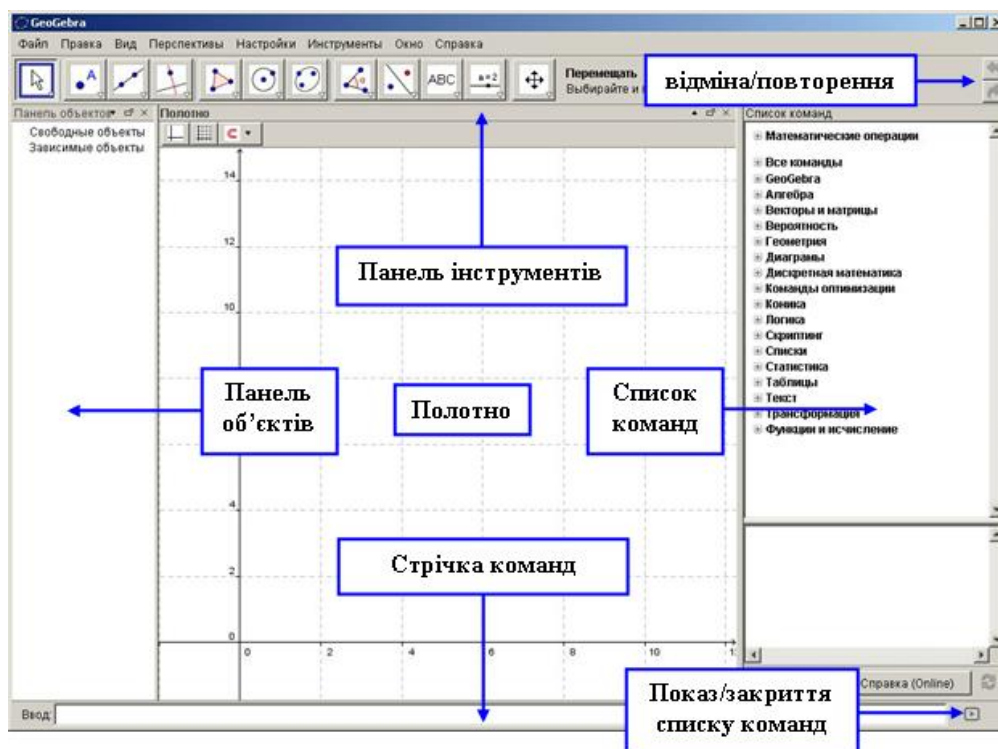
В Інтернеті поміщено чимало моделей, які можна безкоштовно застосовувати у навчальному процесі. На офіційному сайті програми GeoGebra (рис. 2.7.) підібрана ціла база таких моделей. Неабияка колекція моделей (в першу чергу для уроків математики, впорядкована авторами посібника згідно діючих програм) доступна у системі «Готуємося для уроків».

Для роботи в GeoGebra потрібно встановити її на комп'ютері. Цей процес складається з двох етапів: підготовчого (на якому ми встановлюємо Java) та основному (безпосереднє встановлення GeoGebra).

Після завершення інсталювання програму можна запускати. Розглянемо кожну область інтерфейса (рис. 2.8.):

Головне меню програми, як і у будь-якої програми, здійснює усі функції. На панелі інструментів розміщені усі необхідні інструменти, за допомогою яких можна виконати побудову об'єктів з використанням миші. Дві кнопки «Відміна/повторення», де верхня - відмінює останню дію, а нижня - повертає відмінену. Основна область, де створюються об'єкти, називається полотном, а область, у якій записуються усі об'єкти, створені на полотні (навіть приховані) носить назву

панель



об'єктів.

Рис. 2.8. Інтерфейс GeoGebra

Стрічка команд являє собою область, що допускає введення всіляких команд, форм, рівнянь тощо, які відразу відбиваються на панелі об'єктів та полотні. Показ/закриття списку команд допускає продивитися весь список команд для введення до стрічки команд.

Рис. 2.9. Панель інструментів



Панель інструментів дублює розділ "Инструменты" головного меню та потрібна для більш швидкого доступу до основних інструментів побудови у програмі. У панелі інструментів більшу частину обрахунків та побудов можна здійснити за допомогою миші, що дає можливість застосовувати програми разом з інтерактивною дошкою.

2.3. Особливості використання системи GeoGebra при вивченні лінійного програмування

В реаліях сучасного суспільства розкриваються технології, які застосовуються в навчанні підростаючого покоління. Поширення портативних девайсів (КПК, смартфонів, планшетів) та впровадження мобільних і змішаних технологій навчання спричиняють активізацію науково-методичних пошуків у напрямі застосування предметно-орієнтованих програмних середовищ. У навчанні математики акцентують увагу на програмах динамічної математики. У таких програмах розробники передбачають можливість динамічного варіювання вихідними математичними об'єктами для візуалізації їх властивостей. Для прикладу, можна назвати такі програми: Gran (Gran1, Gran2d, Gran3d), DG, The Geometer's SketchPad, GeoGebra, Математический конструктор, Cabri та подібні до них. Над впровадженням даних середовищ у навчання математики працювали Ю. Горошка, В. Дубровського, М. Жалдака, С. Познякова, С. Ракова, В. Ракути, С. Семерікова, М. Хохенватора, І. Храповицького, М. Шабанової, Т. Ширикової та інших. В даний час акцентується увага на питаннях застосування цих середовищ на уроках математики у загальноосвітніх навчальних закладах. Автори описують зразки рішення задач планіметрії, стереометрії, початків аналізу, окреслюючи аспекти застосування даних програм для автоматизації розрахунків, візуалізації результатів, проведення досліджень властивостей об'єктів тощо. Розглянувши різні праці, ми робимо висновок про типові застосування програмних засобів, коли розв'язок задачі у програмній оболонці дублює традиційні способи

розв'язання у зошиті, та нетрадиційне, коли розв'язання задач ґрунтується на відкритті математичного факту через зміни динамічної конструкції, «комп'ютерному доведенні» певного твердження на емпіричному рівні через перебір великої кількості варіантів, на побудові відповідностей та використанні таблиць значень окремих параметрів для оцінки певного факту.

Ефективним вважається використання відповідних підходи для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування, а саме використання програм динамічної математики як дієвого засобу формування функціонального мислення учнів. Серед розмаїття даних програм ми обрали програму GeoGebra як одну з найпотужніших та вільно поширюваних. Кожна нова версія програми збагачується послугами і розширює напрямки її застосування не лише у галузі шкільної математики.

Геометричні задачі на екстремум частенько завдають труднощі навіть у дітей, рівень математичної освіти яких вище середнього. Дані задачі мають складний, навіть трохи незвичний для типових вправ, спосіб формулювання умови і пошук відповіді. Адже, необхідно відокремити задані величини, побудувати функцію, яка пов'яже ці величини з шуканою, а потім ще дослідити цю функцію на наявність екстремуму. Ці дії часто не усвідомлюються типовими учнями, оскільки додатково вимагають уже сформованих геометричних понять та аналітичних умінь. Конструктивні підходи до рішення таких задач, реалізовані у програмі динамічної математики, зменшують вагу аналітичних розрахунків і на перший план висувають потребу у вміннях змодельовати потрібну конструкцію, урахувати залежності між її параметрами, візуалізувати окремі позиції можливих результатів, навіть «побачити» шукану функцією, для якої потрібно визначити екстремум.

Систему динамічної математики GeoGebra повсякчас оновлюють та вдосконалюють. Так, недавно появився сучасний інструмент, режим випробування GeoGebra, який допомагає проводити іспити без доступу до Інтернету, з допомогою GeoGebraTube або іншого програмного забезпечення, інсталюваного на комп'ютері. Вся робота та кожна дія, зокрема, учнів з даним

модулем документується в журналі іспиту. Graphing Calculator Released GeoGebra можуть використовувати як з телефонів і планшетів Android, так з iPhone і Windows, що спрощує та активізує роботу з навчальним процесом, так і конкретно з лінійним програмуванням та проектуванням динамічних графічних об'єктів, що має доступ до GeoGebraTube. Напрацювання об'єднання GeoGebra являють понад 300000 вільних і динамічних робочих листів і книг. Для комфортного співробітництва та кооперації між учнями та вчителями організовано GeoGebra групи (Collaboration for Everyone), що дає можливість опрацьовувати поштові тексти, зображення, відео, PDFs і робочі листи. В системі GeoGebra опрацьовано модуль, у якому можна задавати домашні завдання для учнів та слідкувати за їх роботою, бо зберігається оцінка, дата, тривалість і побудова кожної із спроб рішення. Учні можуть зберігати поточний стан виконаного завдання для подальшої корекції.

Цінною ознакою системи динамічної математики GeoGebra є інтеграція її у систему дистанційного навчання Moodle. Система GeoGebra інтегрується через фільтр GeoGebra Filter (Math Applets), одержаний із сайту moodle.org. Застосування Geogebra Filter дає можливість вбудовувати файли системи GeoGebra у лекційний матеріал, лабораторні та практичні заняття, тести, повідомлення форуму, блоги та інші складові системи. Врахування типу використовуваного апаратного засобу можливе у налаштуваннях фільтру з зазначенням ширини, висоти та параметрів аплетів GeoGebra. Застосування файлів аплетів дозволене як з сайту GeoGebra, так і з сайту системи дистанційного навчання Moodle. Ще один прийом доступу до системи GeoGebra можливий з мобільного пристрою, за умови користування експериментальною версією geogebra mobile (<http://www.geogebra.org/mobile/>), при цьому робота мобільного пристрою вимагає абсолютного виконання стандарту мови javascript та підтримки HTML5 у Web-браузері та не потребує Java ME.

Послідовна система навчання із застосуванням комп'ютерно-орієнтованих прийомів оснований на концепціях теорії проблемного навчання та

теорії поетапного формування розумових дій, що дає можливість управляти навчальною діяльністю і створювати орієнтувальні основи дій для розвитку творчих здібностей. Одночасно набуття навичок побудови і дослідження моделей активізує навички знаходження розв'язку задачі (<http://www.geogebra.org/m/w3KpBQPR>), що має високу цінність – воно забезпечує передумови для підвищення системного і логічного мислення. Таке навчання забезпечує формування наукового світогляду. Подано приклади задач для зростання ефективності вивчення лінійного програмування із застосуванням системи комп'ютерної математики GeoGebra.

Далі продемонстровано приклади застосування системи GeoGebra для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування, тобто лінійних рівнянь, нерівностей та систем рівнянь. Розв'язування таких завдань розкриває перед учнем чималу кількість евристичних засобів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, які використовуються в дослідженні та в процесі вивчення наступних тем математики.

Приклад 1. Для приготування корисного сніданку, необхідно використати продукти, які містять не менше 6 умовних одиниць (ум. од.) жирів, 16 ум. од. білків, 12 ум. од. вітамінів. Виявилося, із магазинних продуктів тільки 2 види можна використати для приготування сніданку. Господиня надумала ці товари купити, попередньо визначивши, що в 1 кг продуктів першого виду припадає 2 ум. од. жирів, 2 ум. од. білків, 3 ум. од. вітамінів, а в 1 кг продуктів другого виду – 2 ум. од. жирів, 4 ум. од. білків та 2 ум. од. вітамінів. Яку кількість необхідно придбати продуктів кожного виду, забезпечивши при цьому найбільшу кількість жирів, білків та вітамінів, щоб витримати на покупку найменше грошей, якщо 1 кг продуктів першого виду коштує 2 грошові одиниці, а 1 кг продуктів другого виду – 3 гр. од.? Господиня має тільки 20 гр. од.

Розв'язування. Будуємо математичну модель, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 2y \geq 6, \\ 2x + 4y \geq 16, \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$2x + 3y \leq 20$$

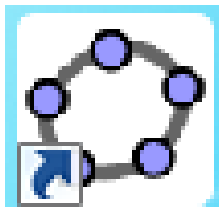
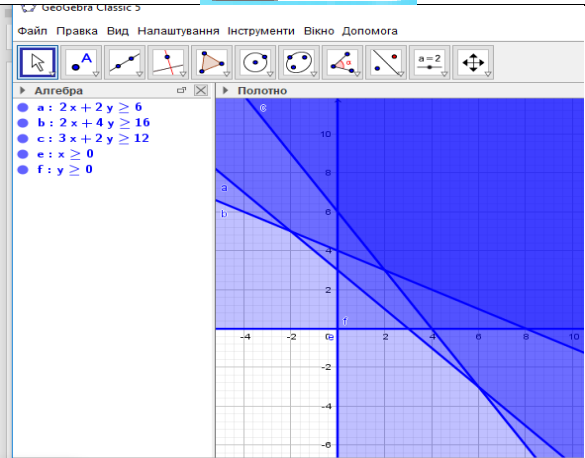
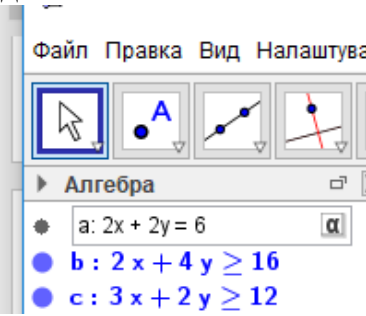
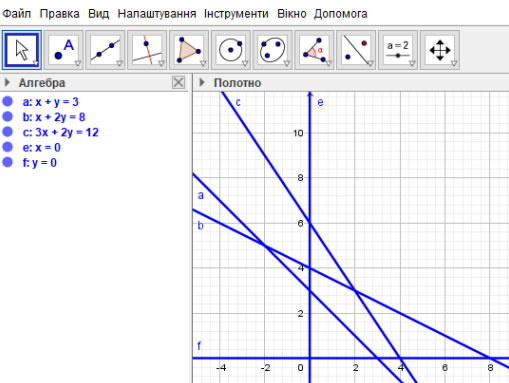
Задача лінійного програмування має вигляд: $\min F = 2x + 3y$ за умов:

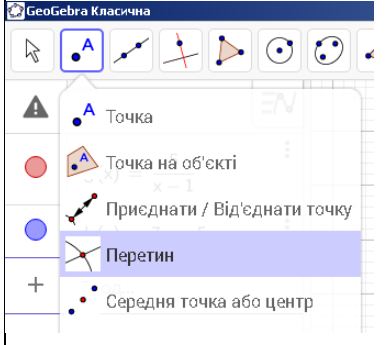
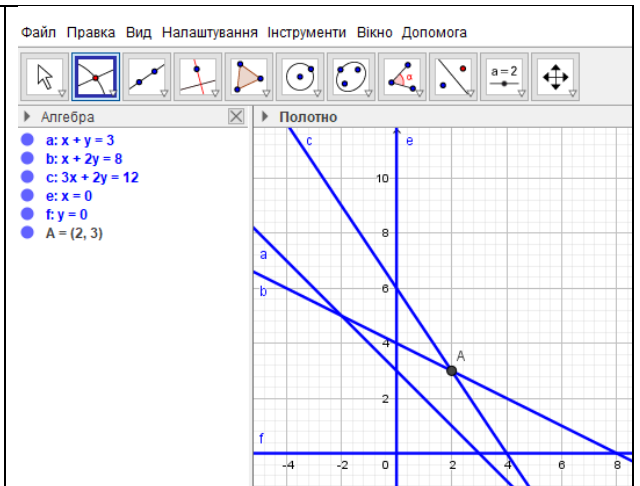
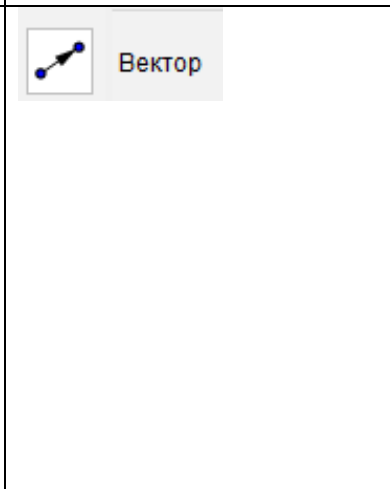
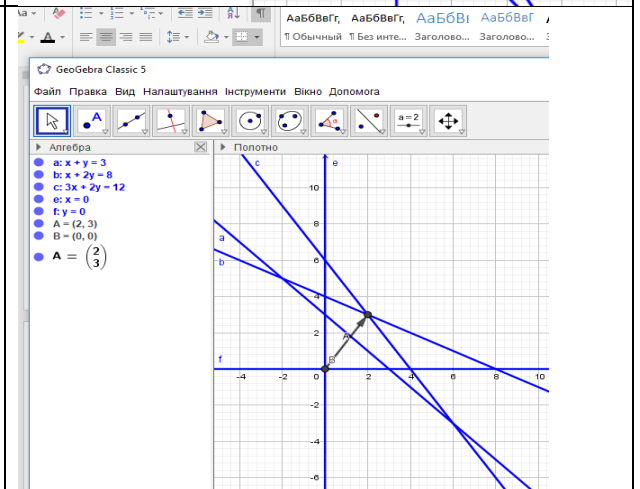
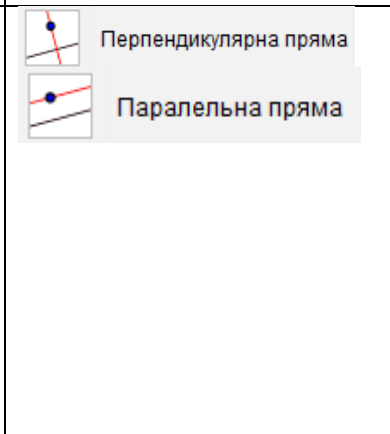
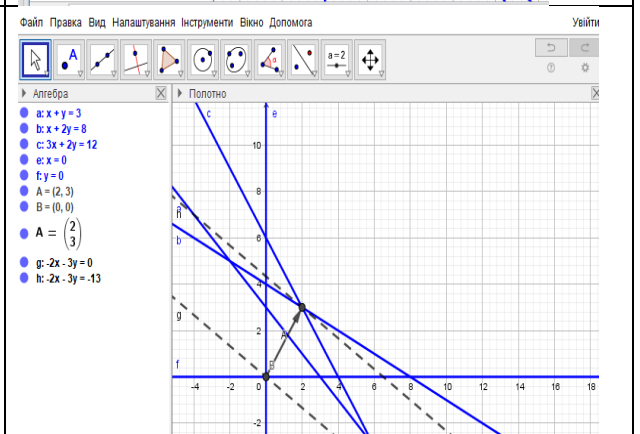
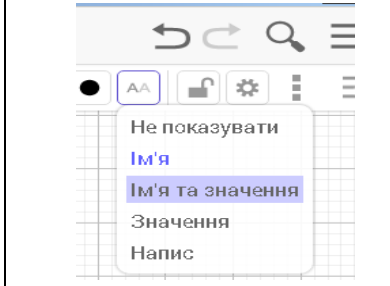
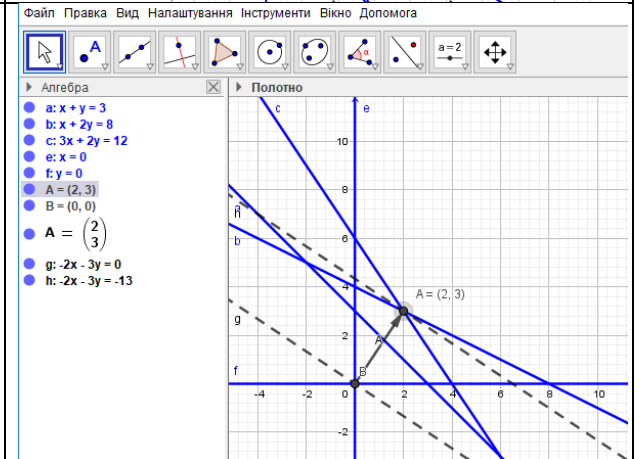
$$\begin{cases} 2x + 2y \geq 6, \\ 2x + 4y \geq 16, \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Правило-орієнтир розв'язування задачі показано в таблиці 2.1., розв'язок задачі показано на рисунку 2.10.

Таблиця 2.1.

Правило-орієнтир розв'язування задачі

1	2	3
Відкрийте програму GeoGebra за допомогою ярлика	По ярликові на робочому столі клацаємо двічі	
У рядок введення даних введіть по черзі функції $2x + 2y \geq 6,$ $2x + 4y \geq 16,$ $3x + 2y \geq 12$ $x \geq 0, y \geq 0.$ Програма побудує графік – пряма	Функції по черзі вводимо Ввод: $2x+4y \geq 16$ Аналізуємо малюнок. Множина допустимих розв'язків наведена темним кольором	
В нерівностях системи обмежень знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності	На нерівності клацаємо двічі і змінюємо знак 	
1	2	3

Перетин отриманих напівплощин і визначає багатокутник рішень даної задачі.	Виберіть на панелі інструментів Точка → Перетин 	
Будуємо вектор $\vec{F} = 2x + 3y$		
Будуємо перпендикуляр и до вектора $\vec{F}$.		
Коренем нерівності є точка A	Виберіть точку, яка створилася і змініть її стиль на «Ім'я та значення». 	

Після побудови графіків функцій учні отримують наступний рисунок (Рис. 2.10):

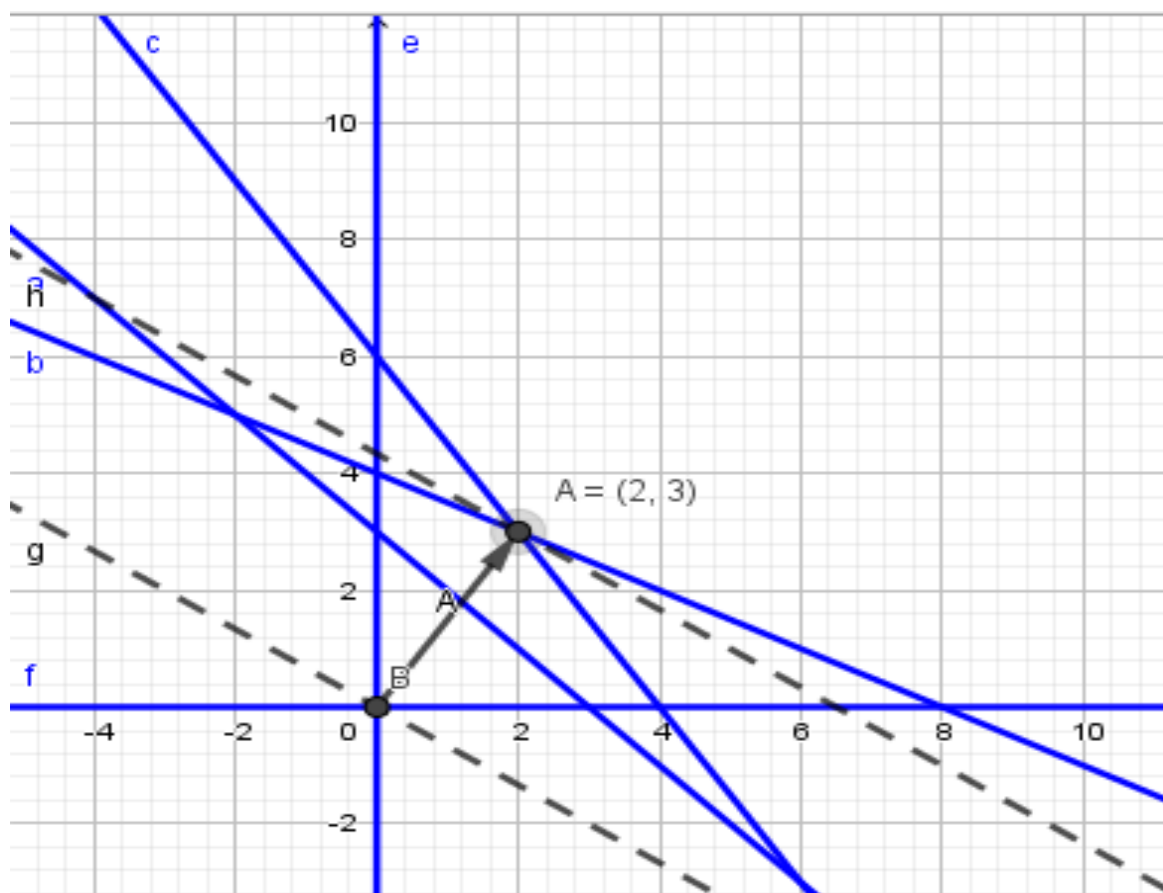


Рис. 2.10. Геометрична інтерпретація задачі

З рисунка видно, що найменше значення набуває точка перетину прямих $2x+4y-16=0$ та $3x+2y-12=0$. Координати цієї точки $x=2$, $y=3$.

Це означає, що господиня повинна придбати 2 кг продуктів першого виду та 3 кг продуктів другого виду.

Приклад 2. Спеціалізація підприємства виробництво та реалізація електроплит і морозильних камер. Слід зазначити, при обмеженому обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів), збут продукції необмежений. Складіть такий план реалізації техніки на місяць, за якого виручка буде максимальною.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в табл. 2.2.

Побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Таблиця 2.2.

Інформація, необхідна для складання виробничої програми

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, м ²	скла, м ²	
Морозильна камера	9,2	3	—	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Нехай x кількість вироблених морозильних камер, а y — електроплит. Сформулюємо математично умови, що обмежують застосування ресурсів.

Виходячи з нормативів застосування кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл.2.2., запишемо сумарні витрати робочого часу: $9,2x+4y$

За умовою задачі ця величина не може бути більшою за загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9,2x+4y \leq 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x+6y \leq 240;$$

$$2y \leq 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x та y знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F=300x+200y$

Отже, умови задачі, описані в прикладі 2, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$F=300x+200y$ за умов:

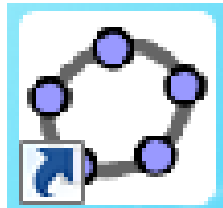
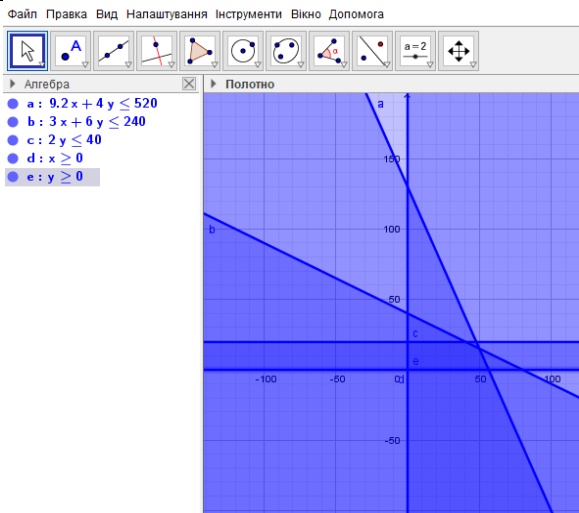
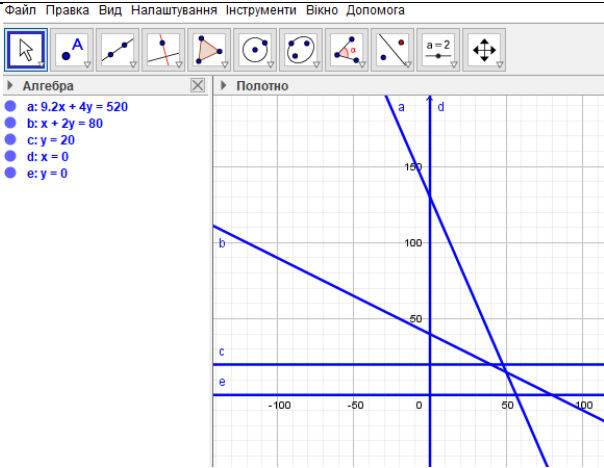
$$\begin{cases} 9,2x + 4y \leq 520, \\ 3x + 6y \leq 240, \\ 2y \leq 40. \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

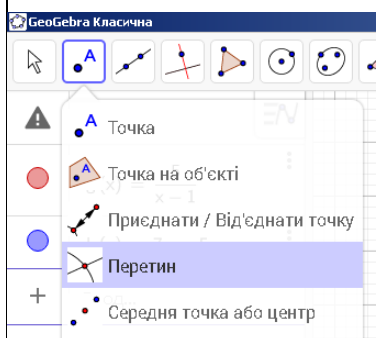
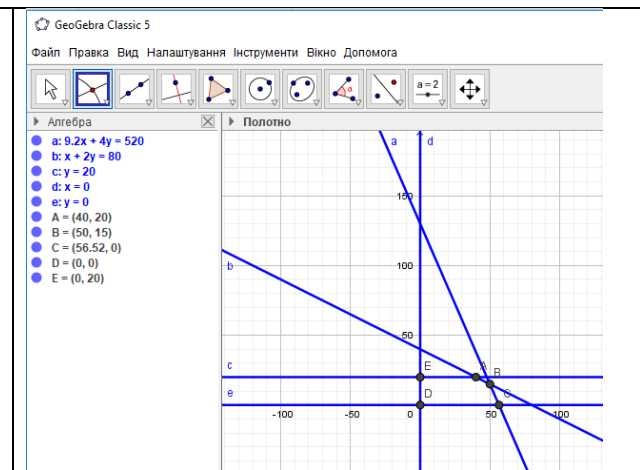
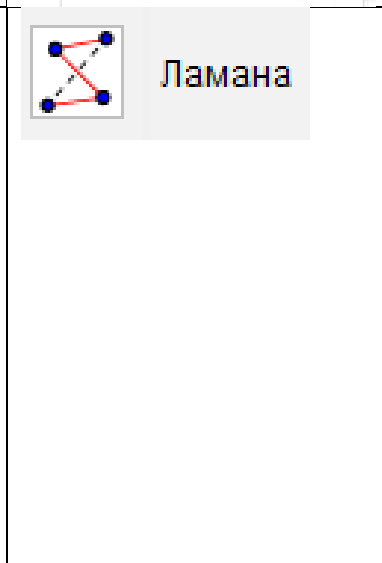
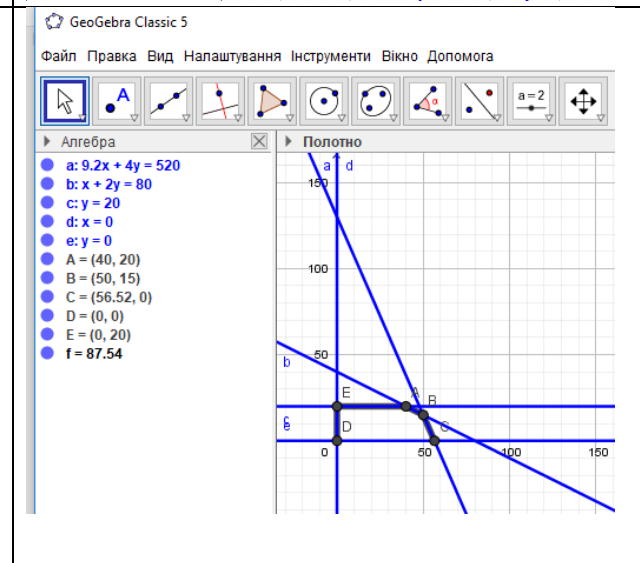
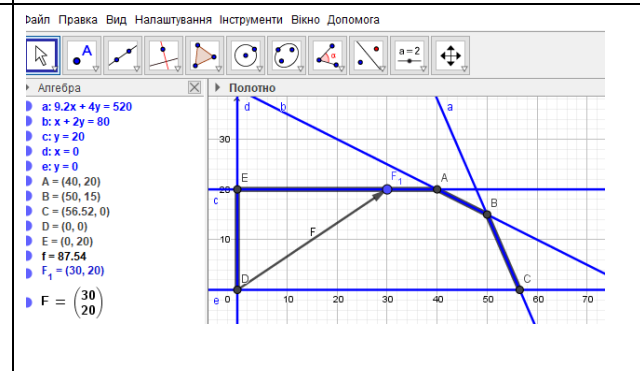
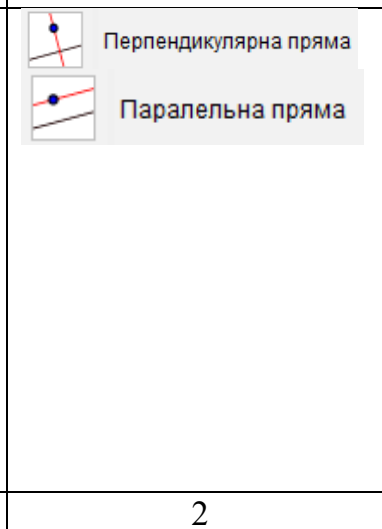
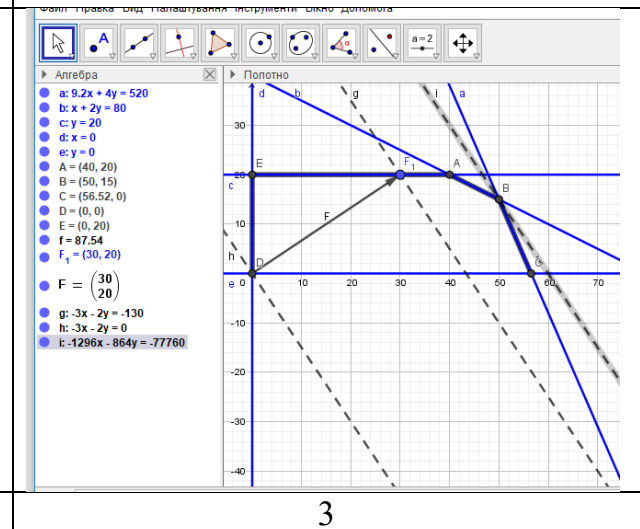
Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від'ємною.

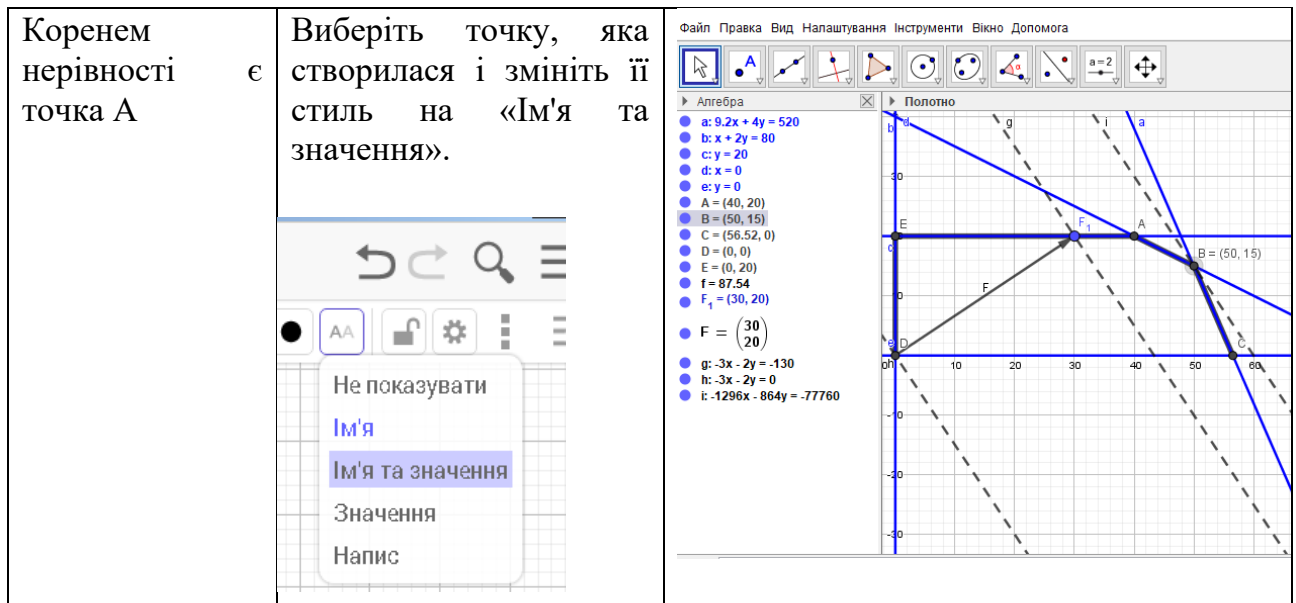
Правило-орієнтир розв'язування задачі показано в таблиці 2.3., розв'язок задачі показано на рисунку 2.11.

Таблиця 2.3.

Правило-орієнтир розв'язування задачі

1	2	3
Відкрийте програму GeoGebra за допомогою ярлика	По ярликові на робочому столі клацаємо двічі	
У рядок введення даних введіть по черзі функції $9.2x + 4y \leq 520$, $3x + 6y \leq 240$, $2y \leq 40$. $x \geq 0, y \geq 0$. Програма побудує графік – пряма	Функції по черзі вводимо Ввод: $2x+4y \geq 16$ Аналізуємо малюнок. Множина допустимих розв'язків наведена темним кольором	
В нерівностях системи обмежень знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності	На нерівності клацаємо двічі і змінюємо знак	
1	2	3

Перетин отриманих напівплощин і визначає багатокутник рішень даної задачі.	Виберіть на панелі інструментів Точка → Перетин 	
Багатокутником рішень є п'ятикутник ABCDE.		
Будуємо вектор $\vec{F} = 300x + 200y$		
Будуємо перпендикуляр до вектора $\vec{F}$.		
1	2	3



Розв'язавши задачу графічним методом лінійного програмування, дістаємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер — 50 штук, електроплит — 15 ($x=50, y=15$).

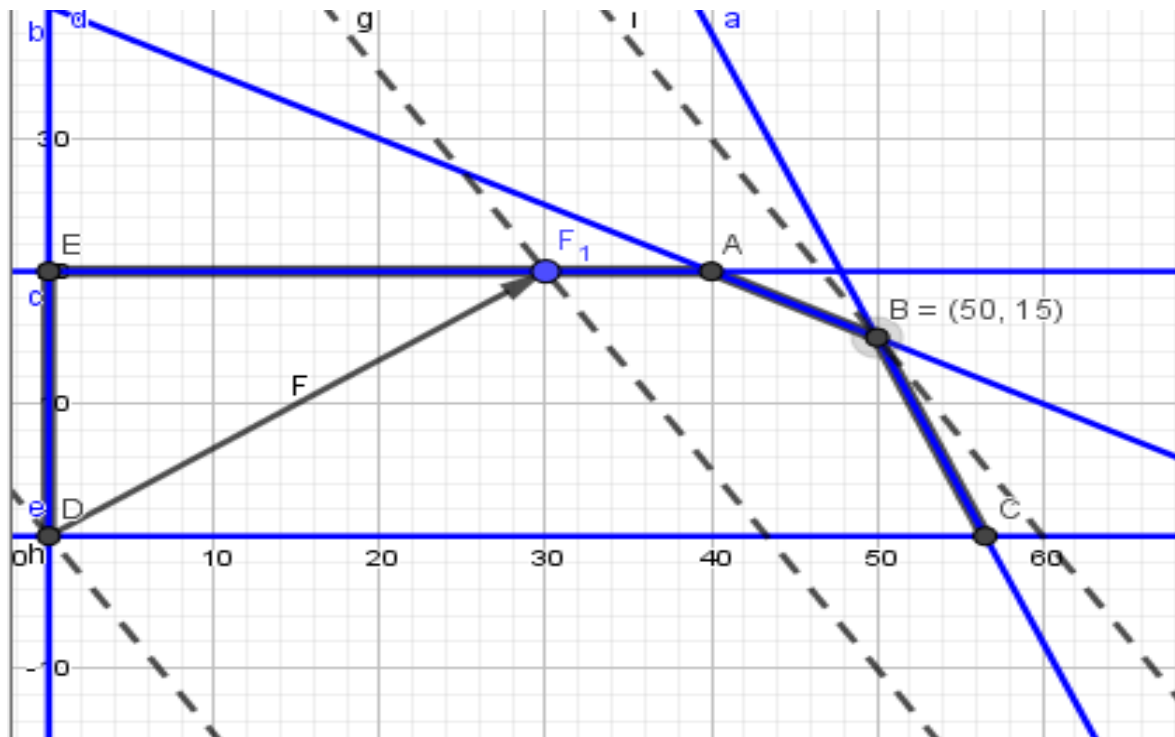


Рис. 2.11. Геометрична інтерпретація задачі

Зробимо перевірку умов задачі::

$$9,2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі стверджуються, крім того, згідно оптимального плану можна використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка дорівнює: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18000$ ум. од.

При чому, є можливість збільшення виручки на $18000 - 16800 = 1200$ ум. од., тобто на 7,1%

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ II.

1. Використання засобів комп'ютерної математики дозволяють виконувати різні математичні операції та перетворення алгебраїчних виразів заданих в чисельній та символьній (змінні, функції, поліноми, матриці тощо) формах. Наприклад: MathCad, MatLab, Gran (1-3), Maxima, MathPaper тощо. В даний час існує велика кількість он-лайн програм, які допомагають при здійсненні обчислень, побудові графіків, моделей та інших математичних об'єктів. Для прикладу можна назвати обчислювальний онлайн засіб Wolframalfa. Деякі математичні пакети зустрічаються як в он-лайн, так і в інсталюваній версії (GeoGebra).

2. Одним із засобів інформаційно-комунікаційних технологій навчання математики, рекомендованих навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів математичного спрямування), є система динамічної математики GeoGebra. Функціональні можливості програми та потужна веб-підтримка користувачів GeoGebra надають можливість ефективно її використовувати при вивченні переважної більшості теоретичного та практичного матеріалів основного курсу математики. Розв'язування таких завдань розкриває перед учнем чималу кількість евристичних засобів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, які використовуються в дослідженні та в процесі вивчення наступних тем математики.

РОЗДІЛ III. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Порівняльна характеристика математичних курсів за вибором та курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики»

Розвиток світового і, зокрема, європейського освітнього простору об'єктивно потребує від української школи адекватної реакції на процеси реформування загальної середньої школи, що відбуваються у провідних країнах світу. Загальною тенденцією розвитку старшої профільної школи є її орієнтація на широку диференціацію, варіативність, багатoproфільність, інтеграцію загальної і допрофесійної освіти.

Пріоритетними напрямками оновлення сучасної освіти, зокрема математичної, є підвищення якості математичної підготовки, створення умов для розвитку особистості учня, забезпечення його освітньої та особистісної самореалізації як у повсякденному житті, так і в майбутній професійній діяльності. Разом з тим посилюється роль прикладного спрямування базових навчальних предметів. Це потребує пошуків нових підходів до організації та управління навчальною діяльністю учнів, залучення їх до власної дослідницької, творчої діяльності з вивчення різноманітних моделей реальних об'єктів. Своєчасним стає створення програм курсів за вибором прикладного спрямування.

Перед школою постає завдання підвищення інтересу старшокласників до математики. Звичайно, багато залежить від учителя. На жаль, сьогодні не всі діти обирають профіль за здібностями чи інтересами, а, як правило, за фаховим рівнем вчителів чи адміністрації школи.

Демократизація освіти, надання їй профільної спрямованості у старшій школі вимагає пошуку шляхів удосконалення підготовки учнів 9 класів до обґрунтованого вибору ними майбутнього напрямку навчання. Профільна

підготовка здійснюється у 10-11 класах із метою орієнтації учнів, сприяння їм у виборі ними майбутньої професії.

Формами реалізації профільної підготовки учнів 10-11 класів, згідно із затвердженою «Концепцією профільного навчання в старшій школі»[24], визначено курси за вибором, факультативи, предметні гуртки, наукові товариства учнів, Малу академію наук, предметні олімпіади, кабінети профорієнтації. Реалізується програма курсу за рахунок годин варіативної складової навчальних планів загальноосвітньої школи.

Функцією курсів за вибором допрофільної та профільної підготовки є формування у школярів правильного вибору профілю навчання, визначення сфери майбутньої професійної діяльності, усвідомлення учнями своїх переваг з позиції майбутньої діяльності.

За змістовим наповненням курси за вибором для допрофільної підготовки знайомлять учнів із світом сучасних професій; розширюють знання учнів з шкільних предметів; вчать оцінювати свої можливості щодо способів діяльності.

У старшій профільній школі курси за вибором сприяють формуванню індивідуальної освітньої траєкторії школярів, орієнтують на усвідомлений та відповідальний вибір майбутньої професії.

Курси за вибором у старшій школі забезпечують поглиблене та розширене вивчення математики. Водночас, вони можуть сприяти вивченню непрофільних предметів і бути зорієнтовані на певний вид діяльності поза профілем навчання, який обрав учень. Програми курсів за вибором і факультативів схвалено Міністерством освіти і науки України та вміщено у посібнику «Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах)», видавництва «Ранок», Харків, 2011 р.[19].

Курс за вибором «Задачі економічного змісту в курсі алгебри» 9 класів використовується вже кілька років з метою допрофільної професійної орієнтації учнів, спрямованої на вибір ними напряму профільного навчання у старшій школі. У своїй структурі вирішує ряд завдань: розширення та поглиблення

змісту курсу алгебри; формування в учнів уявлень про застосування математичного апарату в економіці; застосування отриманих на уроках алгебри знань, умінь та навичок до розв'язування задач економічного змісту; сприяння формуванню стійкого інтересу до математики; розвиток логічного мислення; сприяння вибору учнями профілю навчання в майбутньому; орієнтація на майбутню професійну діяльність.

Курс за вибором передбачає складання математичних моделей для розв'язування задач економічного змісту. Це один із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики. Тому даний курс сприятиме формуванню стійкого інтересу до курсу алгебри та математики в цілому. Під час вивчення курсу учні ознайомляться з аналітичним представленням функції попиту, пропозиції та їх графіками. В основу розуміння властивостей та законів попиту й пропозиції має бути покладено вміння учнів обґрунтовувати економічний зміст понять та величин, виражаючи їх з рівнянь попиту та пропозиції. У подальшому учні графічно або аналітично визначатимуть точку рівноваги, зміни ринкової кон'юнктури шляхом переміщення графіків функцій попиту та пропозиції вздовж осей координат. Слід також звернути увагу на знаходження середніх значень величини попиту, пропозиції, доходу, прибутку. При цьому необхідно завчасно пояснити різницю між доходом та прибутком. Однією із змістових складових пропонованого курсу є методи простих та складних відсотків.

Курс за вибором «Графічні образи алгебраїчних рівнянь і нерівностей» для учнів 9 класів ставить перед собою мету систематизувати й узагальнити знання учнів про елементарні функції, їхні властивості, способи побудови графіків функцій, рівнянь і нерівностей залежно від їх виду. Опрацювання курсу допоможе учням засвоїти поняття області визначення, парності і непарності функції, перетворення симетрії, геометричного місця точок площини, одержати початкові відомості про асимптоти графіка функції, закріпити навички графічного розв'язування рівнянь і нерівностей.

Курс за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» для учнів 8-11 класів з поглибленим вивченням математики спрямований на розвиток логічного мислення та зв'язного мовлення учнів; закріплення базових математичних понять на рівні практичного використання до програмної реалізації включно; підготувати учнів до участі в ЗНО.

Вивчення математичного апарату тем курсу має здійснюватися на уроках математики й випереджати розгляд цих тем при вивченні даного курсу — курсу практичного використання і програмної реалізації базових понять елементарної математики.

Курс за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» для учнів 10 класів з метою практичного застосування математичного апарату при розв'язуванні задач економіки, підготовка учнів до свідомого вибору професії. Зміст даного курсу органічно пов'язаний зі змістом основного навчального матеріалу і водночас має самостійний характер. Курс дає змогу висвітлити практичне застосування екстремумів функції в задачах економіки, що дозволяє розширити знання учнів з математики і економіки.

Проаналізувавши наведенні курси за вибором в навчальній програмі Міністерства освіти та науки ми пропонуємо власний, який поєднує в собі основні математичні методи та інформаційно-комунікаційні технології.

Курс за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» для учнів 9-11 класів сприяє посиленню прикладного спрямування шкільної математичної освіти, що в свою чергу може покращити її рівень та якість. Практична направленість шкільного курсу математики забезпечує фокусування в учнів умінь застосування набутих знань під час опрацювання як самої математики, так і інших навчальних предметів, користуючись при цьому раціональними обчислювальними прийомами, обчислювальною технікою, рішенням рівнянь та нерівностей. Детальне використання математичних методів і сучасної обчислювальної техніки — важливий апарат для опрацювання та аналізу рішень у будь-якому напрямі

цілеспрямованої людської діяльності. Бурхливий темп сучасного економічного життя, у свою чергу, спричинив до застосування новітніх прийомів у математиці. Саме це дало поштовх до виникнення нової галузі математики - лінійного програмування. Суть якого полягає в дослідженні задач, у яких потрібно вибрати оптимальний розв'язок серед всіх можливих. Саме задачам лінійного програмування і присвячено даний курс.

Застосування засобів динамічного моделювання у процесі вивчення лінійного програмування в загальноосвітніх закладах, вибираючи завдання відповідно до індивідуальної освітньої програми учня, активізує підвищення інтересу до навчання математики і удосконалює математичну інтуїцію.

Основна мета курсу – прикладне використання математичного апарату при рішенні задач економіки з застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій, для ефективної підготовки учнів до свідомого вибору професії.

Для побудови класичного алгоритму графічного методу знаходження розв'язку задачі лінійного програмування оптимально використати засоби платформної динамічної математичної програми GeoGebra.

Зміст даного курсу органічно прив'язаний до основного навчального матеріалу і одночасно володіє самостійним характером. В курсі показано практичне використання екстремумів функції в задачах економіки, що сприяє розширенню знань учнів з математики і економіки.

Значну увагу в даному курсі приділяють задачам, які вимагають від учнів застосування знань в нестандартних ситуаціях. Своєрідним для задач лінійного програмування є те, що функція цілі, що оптимізується, лінійно залежить від параметрів процесу, і обмеження, що повинні вдовольняти ці параметри, також лінійні. Вони представлені у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей. Математичні методи в економічних дослідженнях використовують поетапно. На першому етапі здійснюємо постановку задачі, після чого формулюємо потрібні вихідні дані, робимо конкретне та правильне визначення початкових умов і властивостей явищ, що досліджуються. На третьому етапі математично формулюємо задачу, при чому вихідні дані та невідомі величини зображуються

у вигляді рівнянь і нерівностей. І на останньому етапі відбувається розв'язання задачі за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій та аналіз отриманих результатів.

Курс налічує 34 години щотижневих занять групової роботи учнів під керівництвом учителя.

Програма курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» для учнів 9-11 класів (наведена в додатку В.

3.2. Формування вмінь та навичок при вивченні курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики»

Завдання № 10.

Тема: Знаходження розв'язку задач графічним методом

Мета: систематизувати знання про графічну інтерпретацію рішень задачі лінійного програмування; фактично закріпити геометричних прийомів знаходження розв'язку задач як рівноправних з аналітичними методами; показати, що використання графічних методів з підтримкою програми GeoGebra пришвидшує і полегшує роботу в декілька разів.

Тип: узагальнення і систематизації знань і вмінь

Наочність і обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, інстальована та онлайн версії програми GeoGebra.

Хід заняття

I. Організаційний момент

Налаштування учнів на роботу, запуск програми GeoGebra на робочих комп'ютерах.

II. Мотивація навчальної діяльності

Введення прикладних задач із економічним змістом у шкільному курсі математики, пошук шляхів їх розв'язання знайомить учнів з такими важливими категоріями, як податки, банківські розрахунки, доходи, витрати, прибуток тощо. Одержанні за шкільні роки практичні вміння і навички знадобляться їм у подальшому житті.

Отже, прикладні задачі з економічним змістом необхідно пізнавати для загального розвитку. Справді такі задачі застосовуються в побуті, у випадках коли нам необхідно прийняти рішення щодо оптимального використання грошей, на що краще витратити, де заощаджувати та багато інших питань.

III. Фронтальне повторення пройденого матеріалу за питаннями

Згідно рисунків сформулювати конкретні випадки знаходження розв'язку задачі лінійного програмування.

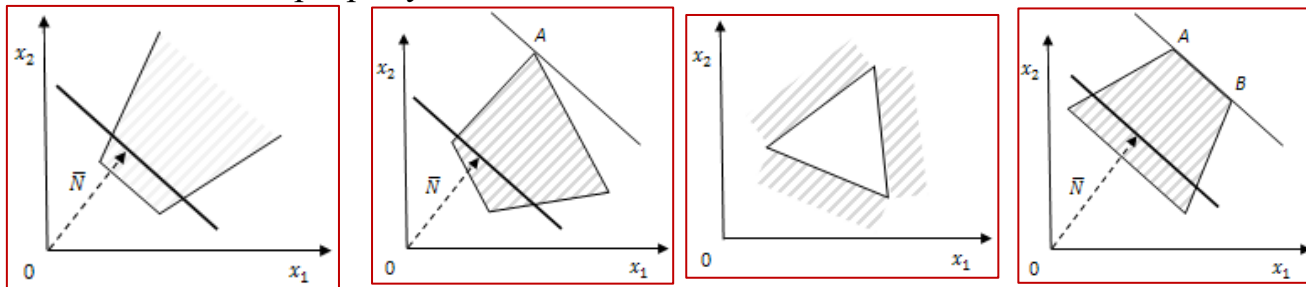


Рис. 3.1. Окремі випадки розв'язку задачі лінійного програмування

1. Цільова функція є необмеженою на множині розв'язків, отже, задача лінійного програмування не має оптимальних планів.
2. Система обмежень є несумісною, то цільова функція не має оптимальних планів.
3. Цільова функція приймає максимального значення в єдиній точці A багатокутника розв'язків.
4. Цільова функція приймає максимального значення в будь-якій точці відрізка AB .

IV. Узагальнення знань та умінь

Задача 3. Для ефективності процесу виробництва двох видів товарів на підприємстві необхідно, здійснення послідовної обробки на токарних і

фрезерних верстатах, і, обрахунок витрат двох видів сировини: сталі і кольорових металів. показники про необхідність кожного ресурсу на одиницю виготовленого товару і загальні запаси ресурсів подані у таблиці:

Таблиця 3.1.

		Витрати на один виріб		Ресурси
		А	В	
Матеріали	Сталь (кг.)	10	70	320
	Кол. метали	20	50	420
Обладнання	Токарні станки (станко-годинни)	300	400	620
	Фрезерні станки (станко-години)	200	400	3400
Прибуток за виріб (тис. грн.)		3	8	

Необхідно сформулювати такий план випуску продукції, котрий забезпечить максимальний прибуток при умові, що час роботи на фрезерних верстатах буде використаний повністю.

Методичний коментар

Складемо математичну модель задачі, в якій x число товарів виду А, а y – виду В. на виробництво продукції витратиться $10x + 70y \leq 320$ кг сталі і $20x + 50y \leq 420$ кг кольорових металів. Час роботи на токарних верстатах представимо нерівністю $300x + 400y \leq 6200$, а на фрезерних верстатах – рівнянням $200x + 100y = 3400$, оскільки час роботи на фрезерних верстатах має бути використаний повністю. Звідси, система обмеження даної задачі матиме вигляд

або

Увесь прибуток зобразимо функцією $F = 3x + 8y$. Відшукаємо множину точок площини, координати яких повинні задовольняти систему обмеження.

Множину допустимих розв'язків становитиме фігуру EFABC (рис. 3.1.).

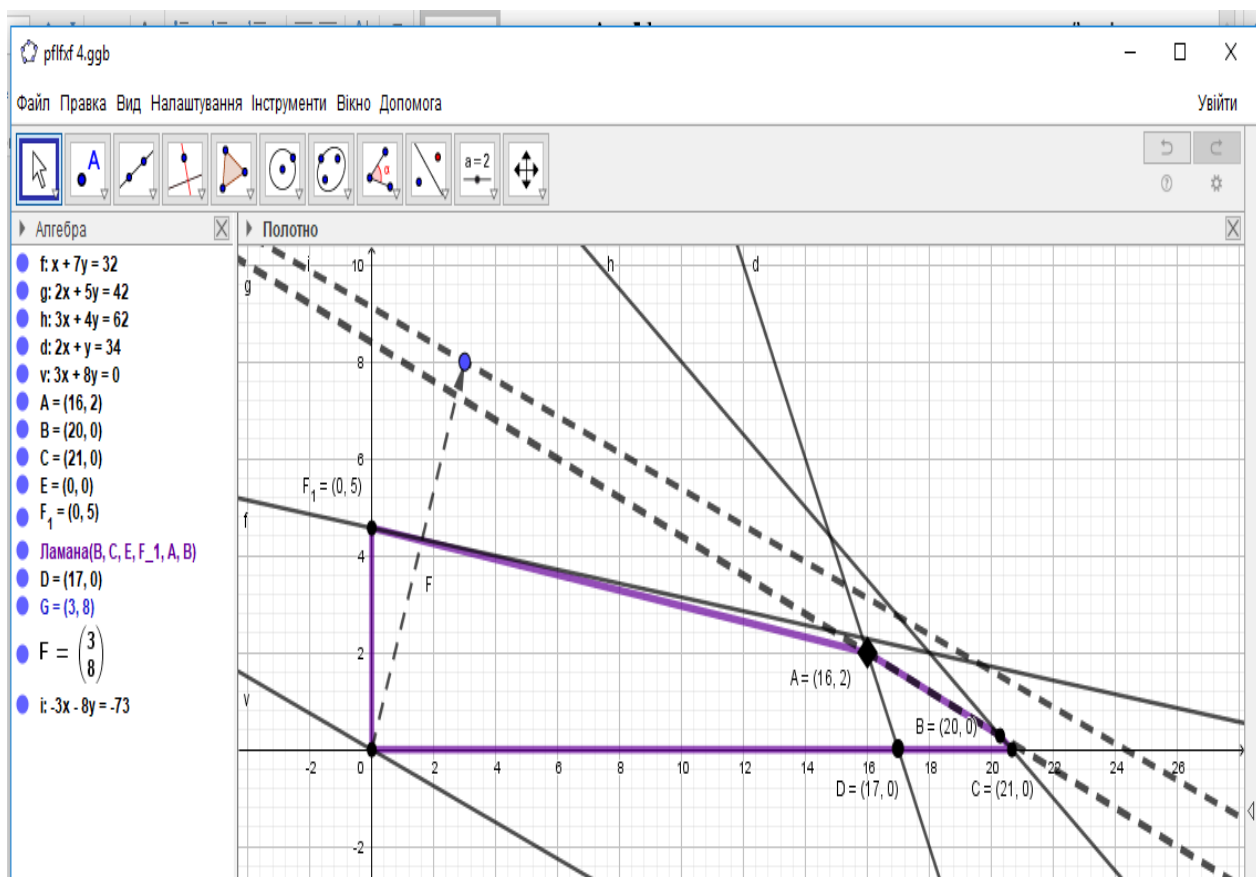


Рис. 3.2. Множина розв'язків - п'ятикутник EFABC

З многогранника EFABC виділяємо множину розв'язків. Серед точок многокутника виберемо ту, в якій цільова функція F дістає максимального значення. Для цього по рівнянню $3x + 8y = c$ будемо вектор $\vec{c}$ і перпендикуляр до нього. Остання точка, яку торкне перпендикуляр до прямої $3x + 8y = c$, буде точка A . Відшукаємо її координати. В програмі GeoGebra їх визначено автоматично, а ми можемо перевірити правильність відображення координат. В загальному випадку для цього потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 34, \\ 2x + 5y = 42 \end{cases}$$

Оскільки, точка A створюється перетином прямих $2x + y = 34$ і $2x + 5y = 42$, розв'язком системи буде пара $(16; 2)$. Даний розв'язок буде оптимальним планом:

$$F_{\max} = 3 \cdot 16 + 8 \cdot 2 = 64.$$

Задача 4. Бетон, вироблений на підприємствах A і B , необхідно доставити на будівельні майданчики № 1, № 2, і № 3. На підприємстві A

виробляється 320 т бетону за добу, а на підприємстві В – 380 т. Попит бетонну на добу розподіляється по будівельних майданчиках так: № 1 – 200 т, № 2 – 280 т, і № 3 – 220 т. Вартість доставки однієї тонни бетону з підприємства А на будівельний майданчик № 1 – 2 ум. од., № 2 – 4, № 3 – 6 та із заводу В відповідно 4, 5, 3 умовні одиниці. Сформулювати план доставки бетонну з мінімальною вартістю.

Методичний коментар

Кількість бетону, що перевозиться з заводу А на будівельний майданчик № 1 – x т, то на № 2 – y , тоді план доставки бетону подаймо таблицею:

Таблиця 3.2.

	№1	№2	№3	
А	2 x	4 y	6 $320-x-y$	320
В	4 $200-x$	5 $280-y$	3 $x+y-100$	380
	200	280	220	

Тоді загальна вартість перевезення становитиме

$$F_{min} = 2x + 4y + 6(320 - x - y) + 4(200 - x) + 5(280 - y) + 3(x + y - 100) = \\ = 3820 - 5x - 4y.$$

Оскільки доставка не може бути від'ємною, то одержимо систему обмеження:

$$\begin{cases} 320 - x - y \geq 0, \\ 200 - x \geq 0, \\ 280 - y \geq 0 \\ x + y - 100 \geq 0, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Множина допустимих значень зображаєм на рис. 3.3.

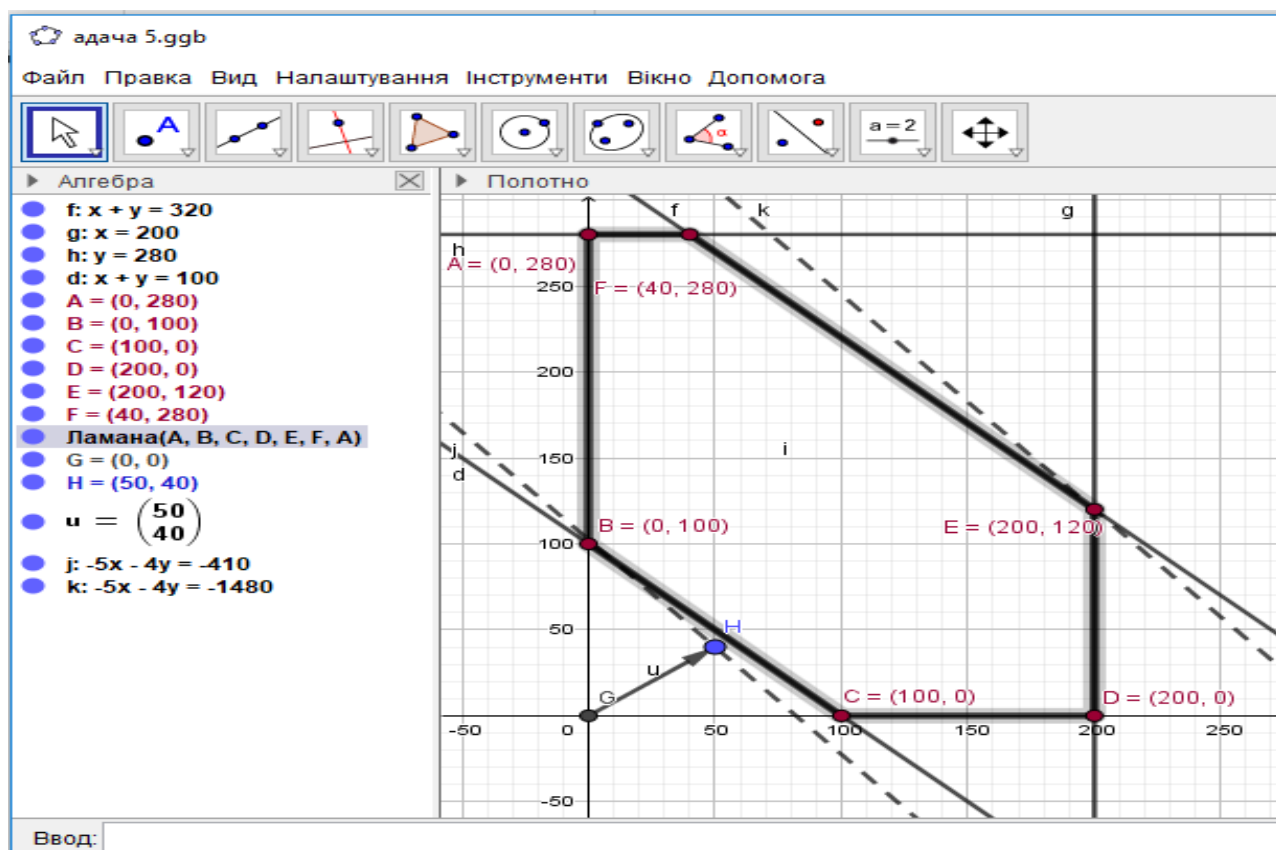


Рис. 3.3. Множина допустимих значень задачі 3.

$B(0;100) = 3420$, $C(100;0) = 3320$, $D(200;0) = 2820$, $E(200;120) = 2340$, $F(40;280) = 2500$, $A(0;280) = 2700$.

Найменше значення функція набуває в точці E (200;120) та становить 2340. Звідси, витрати на доставку будуть найменшими при $x = 200$ та $y = 120$, тому план доставки можемо подати у вигляді таблиці:

Таблиця 3.3.

	1	2	3
A	200	120	0
B	0	160	220

Задача 5. Фірма для виробництва двох видів продукції I і II користується трьома видами сировини A, B, C. На підприємстві вона знаходиться у відношенні 13:9:8 відповідно. При виробництві I виду продукції витрачається

2;0;2 одиниць відповідних видів сировини, а при виробництві II виду продукції – відповідно 2;3;0. Прибуток від продажу I виду продукції становить 3 грош. од., а II виду продукції – 4 грош. од. Складемо план роботи фірми, який забезпечив би максимальний прибуток.

Умову задачі подаймо у таблиці:

Таблтця 3.4.

	A	B	C	вартість
I	2 од.	-	2 од.	3 грош. од.
II	2 од.	3 од.	-	4 грош. од.
	13	9	8	

Методичний коментар

Відзначимо через x од. кількість продукції виду I і y од. – виду II. Звідси випливає система обмежень:

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 13, \\ 3y \leq 9, \\ 2x \leq 8. \end{cases}$$

Система має вигляд $F_{max} = 3x + 4y$. Відшукаємо розв'язки системи обмеження:

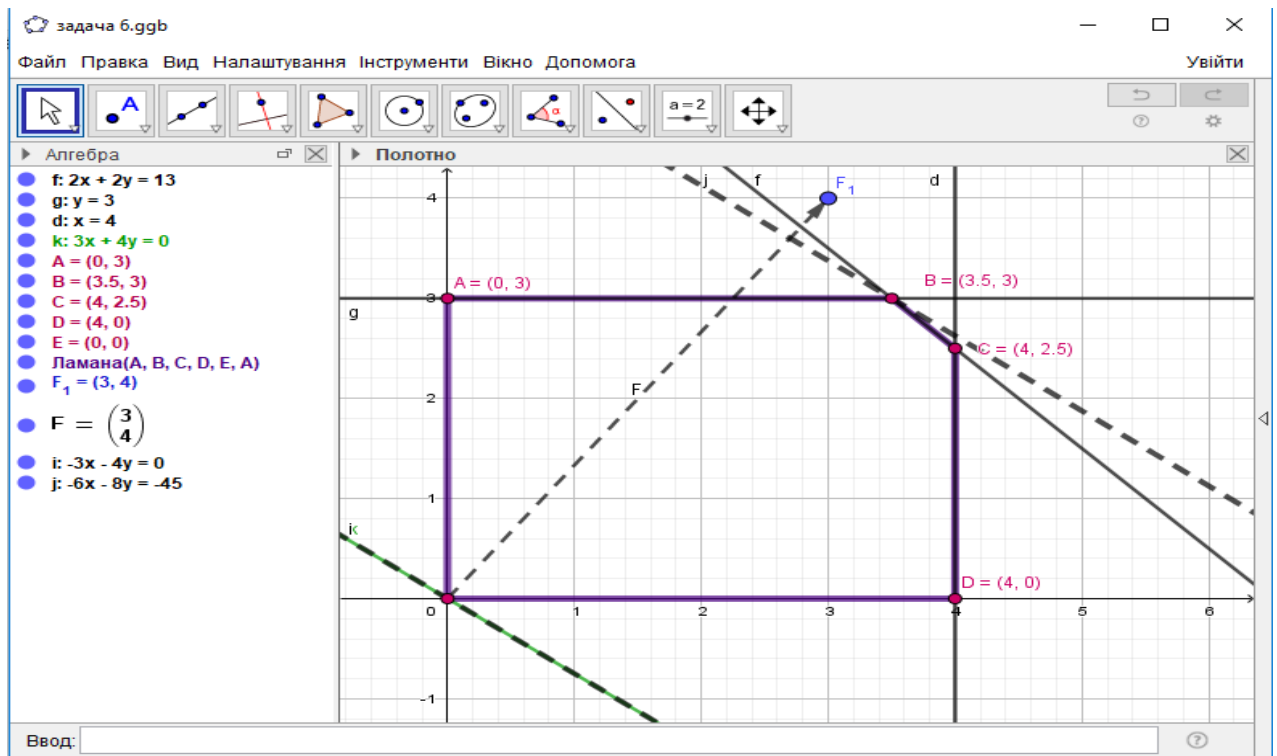


Рис. 3.4. Розв'язки системи обмеження задачі 4.

Оптимальне значення функції F_{max} становитиме на точках багатокутника.

$E(0;0) = 0$, $A(0;3) = 12$. $B(3,5;3) = 22,5$, $C(4;2,5) = 22$, $D(4;0) = 12$. Тому, максимальний прибуток фірма забезпечить собі при виготовленні 3,5 од. продукції I виду і 3 од – II виду.

Задача 6. Підприємство випускає лижне спорядження для дітей та дорослих. Щомісячно фірма здатна виробити не більше 600 дитячих і не більше 300 дорослих комплектів. Якість кожного комплекту звіряють на двох стендах А і В. Кожне дитяче спорядження звіряють 0,3 години на стенді А і 0,1 години на стенді В, а кожне доросле - звіряється 0,4 години на стенді А і 0,3 години на стенді В. Згідно технічного плану стенд А не може робити більше 240 годин на місяць, а стенд В – більше 120 годин на місяць. Виконання кожного дитячого комплекту дає фірмі 50 грн., а кожного дорослого – 90 грн. Скільки дитячих і скільки дорослих споряджень повинне виробляти підприємство, щоб його прибуток був максимальним?

Методичний коментар

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x – кількість дитячих комплектів, які фірма виробляє щомісячно, y – кількість дорослих комплектів. Тоді за умовою $0 \leq x \leq 600$, $0 \leq y \leq 300$. Зайнятість стенду А складає $0,3x + 0,4y$ (год.), що не повинно перевищувати 240 год.

Тому $0,3x + 0,4y \leq 240$.

Аналогічно для стенду В маємо $0,1x + 0,3y \leq 120$. Прибуток фірми складає $\bar{F} = 50x + 90y$ (грн.). Маємо систему обмеження:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,4y \leq 240; \\ 0,1x + 0,3y \leq 120; \\ 0 \leq x \leq 600; \\ 0 \leq y \leq 300. \end{cases}$$

Необхідно відшукати такі цілі значення x і y щоб прибуток $\bar{F} = 50x + 90y$ був максимальним.

Всі можливі розв'язки задачі розташовані в середині або на границі багатокутника EABIJG (рис. 3.5).

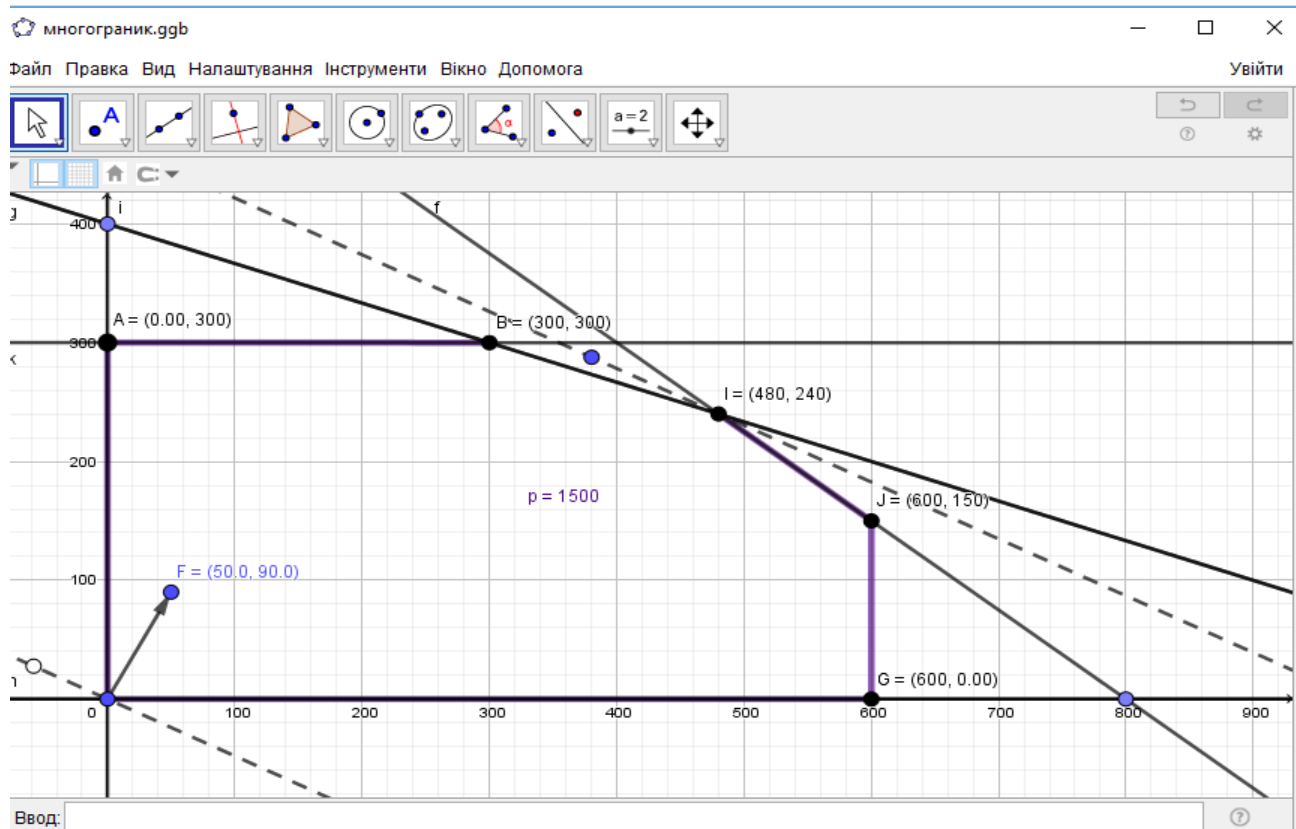


Рис .3.5. Многогранник розв'язків задачі.

На рисунку видно, що функція $\bar{F} = 50x + 90y$ набуває свого максимального значення в одній із вершин E, A, B, I, J або G побудованого многокутника.

Розглянемо отриманий рисунок. Отже, найбільше значення прибутку становить 45600 грн. і знаходиться в точці C, тобто при випуску 480 дитячих комплектів і 240 – дорослих.

V. Підсумок заняття

Повторимо алгоритм знаходження розв'язку задачі економічного змісту графічним методом

VI. Домашнє завдання

Знайти розв'язки задач поданих вчителем.

3.3. Результативність впровадження курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики»

Дослідно-експериментальна робота проводилася у Боратинський ліцей Боратинської сільської ради (11 кл. – 5 учнів, 10 кл. – 15 учнів) Луцького району Волинської області. Усього дослідженням було охоплено 20 учнів.

Заняття проводяться у позаурочний час відповідно до затвердженого розкладу. Відведено на такі заняття було одну годину на тиждень.

Експеримент проводиться з початку I семестру 2024-2025 н. р. та триває 5 місяців передбачає реалізацію учнями 10-11 класу мети: поглибити знання про математичне програмування, узагальнити та закріпити вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь, будувати їх графіки, зокрема, за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій. В ході проекту учні вивчають прикладні задачі, розв'язують системи рівнянь, досліджують графіки, аналізують ряд економічних понять. Проект реалізовується паралельно з виконанням навчальної програми. Проект практико-орієнтований, а тому включає елементи інформаційного, а також дослідницького пошуку, опрацювання додаткової літератури, дозволяє удосконалити вміння користуватися програмним забезпеченням.

Результатом курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» буде створення навчальних проектів, презентацій, буклетів учнів, зміст яких спрямований на розвиток компетентної особистості.

Оцінка ефективності роботи учнів при вивченні курсу здійснювалася за кількісними та якісними показниками, їх динамікою, порівнянням результатів.

При оцінці якості проведення занять курсу за вибором ми керувалися такими критеріями:

Рівень відвідування занять:

- високий – 100-90%;
- достатній – 90-60%;

- середній – 60-50%;
- низький (початковий) – менше 50%.

Рівень активності учнів:

- несамотійної активності — це сприйняття учнями пояснень учителів, засвоєння зразка розумової дії, виконання самотійних робіт репродуктивного характеру за допомогою педагога;

- напівсамотійної активності — засвоєння учнями знань у новій ситуації, їх участь у спільному з педагогом пошуку рішення поставлених навчальних завдань;

- самотійної активності — виконання учнями самотійних робіт репродуктивно-пошукового типу, застосування засвоєних знань у новій ситуації з незначною допомогою педагога;

- творчої активності — виконання учнями самотійних робіт, що вимагають творчої уяви, логічного аналізу, відкриття способу рішення, самотійного доказу без допомоги педагога.

Рівень діяльності учнів на занятті курсу:

- репродуктивний – рівень діяльності, при якому вони застосовують отримані знання на практиці в алгоритмізованих, стандартизованих ситуаціях, виконують завдання за шаблоном, трафаретом, зразком;

- частково-творчий — рівень діяльності учнів, при досягненні якого вони епізодично здатні застосовувати отримані знання на практиці творчо, у нестандартних ситуаціях; виробляти нові вміння й навички на базі вже сформованих;

- творчий — рівень діяльності учнів, при досягненні якого вони здатні постійно застосовувати отримані теоретичні знання на практиці творчо, у нестандартних ситуаціях, виробляти нові вміння й навички на базі вже сформованих;

- дослідницький — рівень діяльності учнів, при досягненні якого вони здатні добувати знання самотійно в ході постановки дослідів, вивчення явищ, об'єктів.

Рівень задоволеності заняттями та їх організацією:

- високий - задоволені всі учні;
- достатній - задоволені понад 75% учнів;
- середній - задоволена більша половина учнів;
- низький - більшість учнів незадоволена.

Для виявлення результатів формуючого експерименту і ефективності програми експериментальної роботи нами, по-перше, була проведена діагностична робота за визначенням рівня сформованості технічних навиків учнів, досягнутого ними в ході апробації серії занять. По-друге, був зроблений порівняльний аналіз якісних критеріїв, отриманих в ході дослідницької роботи.

Таблиця 3.5

Рівень досягнень учнів у навчанні

Кількість учнів	Високий рівень	Достатній рівень	Середній рівень	Низький рівень	К-нт навченості
20	10	6	4	-	76.4%
	50%	30%	20%		

Діагностична контрольна робота по курсу «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики» за I семестр дала змогу відслідкувати ріст навчальних досягнень учнів на протязі семестру, рівень компетентності освіти учнів, зробити висновок про знання та вміння учнів, здобутих за I семестр, відслідкувати рівень сформованості логічного мислення, практичних вмінь та навичок самоосвітньої діяльності учнів.

Для виконання роботи були запропоновані тестові завдання, прикладні задачі лінійного програмування. Частина завдань вирішувалась за допомогою програмного забезпечення GeoGebra. Кожен варіант складався з трьох частин, які відрізнялися за складністю та формою тестових завдань.

Таблиця 3.6.

Поетапний аналіз

№	Елементи знань	Виконал и повністю		Виконал и частково		Не виконали	
		к- сть	%	к- сть	%	к- сть	%
1.	Аналіз вхідних даних	11	55	9	45		
2.	Побудова математичної моделі	17	85	3	15		
3.	Розв'язання системи нерівностей	15	75	5	25		
4.	Побудова багатокутника розв'язків	15	75	4	20	1	5
5.	Зображення цільової функції	11	55	7	35	2	10
6.	Знаходження оптимального розв'язку	10	50	6	30	4	20

У I частині контрольної роботи було запропоновано п'ять завдань з вибором однієї правильної відповіді, що відповідали навчальним досягненням учнів початкового та середнього рівнів. Тестування проходило в GeoGebraTube і позитивний результат отримали всі діти. II частина контрольної роботи представляла собою прикладну задачу лінійного програмування з сформульованою математичною моделю, що відповідали достатньому рівню навчальних досягнень учнів. Розв'язання здійснювалося в програмі GeoGebra мало короткий запис рішення без обґрунтування. Більшість учнів знайшли оптимальний розв'язок задачі. Найчастіше в даній частині учні припускали помилки при визначенні області допустимих значень. III частина контрольної роботи складалася з одного завдання, що відповідало високому рівню навчальних досягнень учнів, розв'язання якого мало розгорнутий запис рішення з обґрунтуванням. Половина учнів курсу успішно справилися з даним завданням і надали повне пояснення власних дій.

Аналіз результатів дослідження показує, що коефіцієнт навченості учнів склав 76.4%.

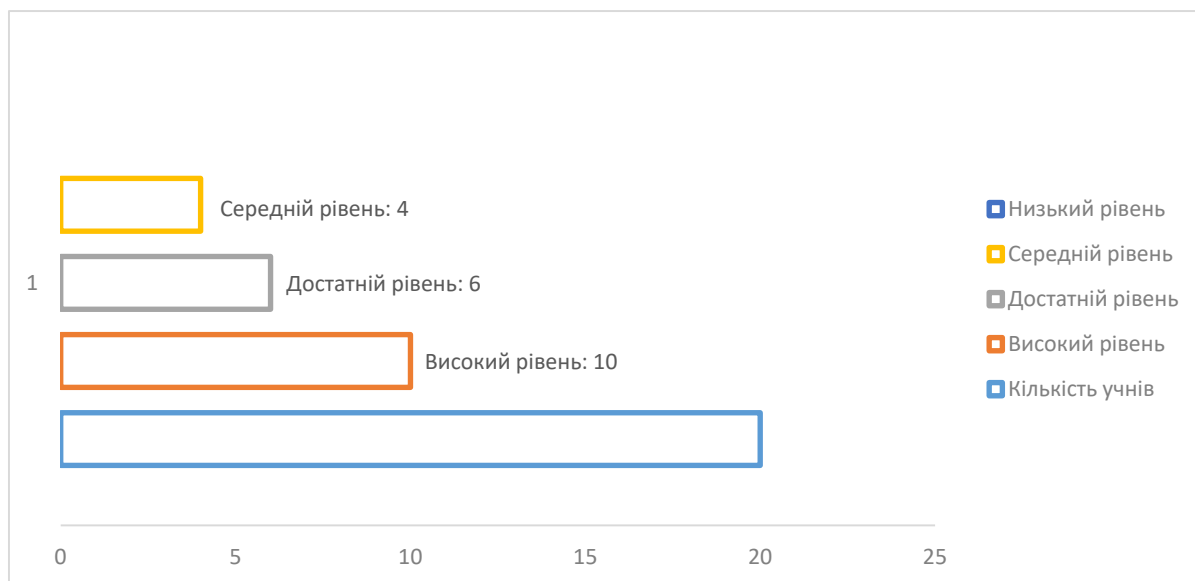


Рис. 3.6. Рівень досягнень учнів у навчанні

Дослідження рівня активності учнів ми провели на традиційних заняттях та на заняттях з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. Спостерігається ріст активності та збільшення концентрації уваги на матеріалі з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

Якщо показати рівень активності та уваги на традиційному уроці у відсотках (Рис. 3.7.), то побачимо, що не активними було 6% учнів, середньої активності - 26 %, висока активність у 68% учнів.

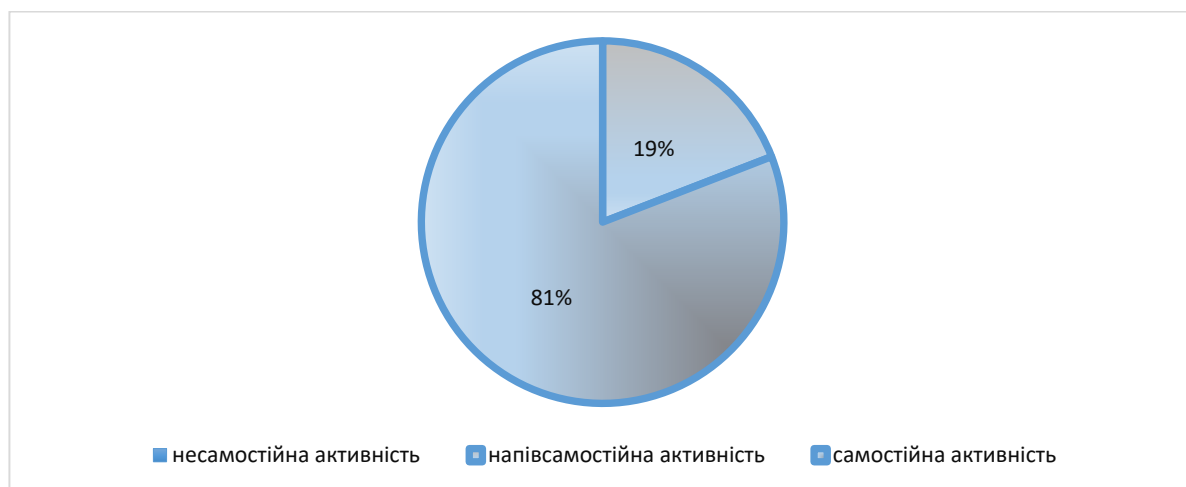


Рис. 3.7 Активність учнів на традиційному занятті

Якщо показати рівень активності та уваги на занятті з використанням інформаційних технологій у відсотках (Рис. 3.8.), то побачимо, що не активних учнів не було - 0%; 13%- середня активність на уроці; 87%- висока активність учнів.

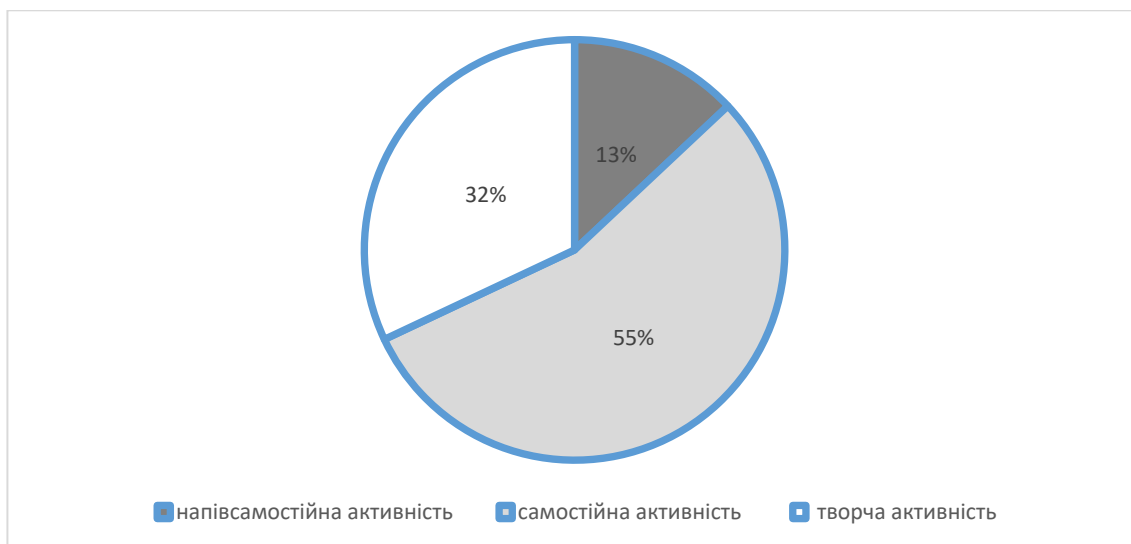


Рис. 3.8. Активність учнів на занятті з використанням інформаційно-комунікаційних технологій

Порівнявши результати, показані на двох діаграмах, після проведення традиційного та заняття з використанням інформаційно-комунікаційних технологій курсу «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики», можна зробити висновок, що нестандартне заняття має більшу результативність. На такому занятті до роботи були залучені всі учні класу, рівень їх активності та уважності у порівнянні з традиційним має вищі показники. Зник той відсоток, де була низька активність на занятті. Переваги заняття з використанням інформаційно-комунікаційних технологій над традиційним очевидні.

При аналізі критерія відвідування курсу учнями, необхідно зазначити, що пропуски занять здійснюються лише по поважних причинах і показник знаходиться на рівні 85-95 %.

Проаналізувавши задоволеність учнів заняттями та їх організацією відповідним анкетуванням, можна зробити висновок, що заняття з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема системи динамічної математики GeoGebra, викликають в учнів високий інтерес, оскільки кожне заняття відрізняється одне від одного своєю унікальністю та різноманітністю форм проведення.

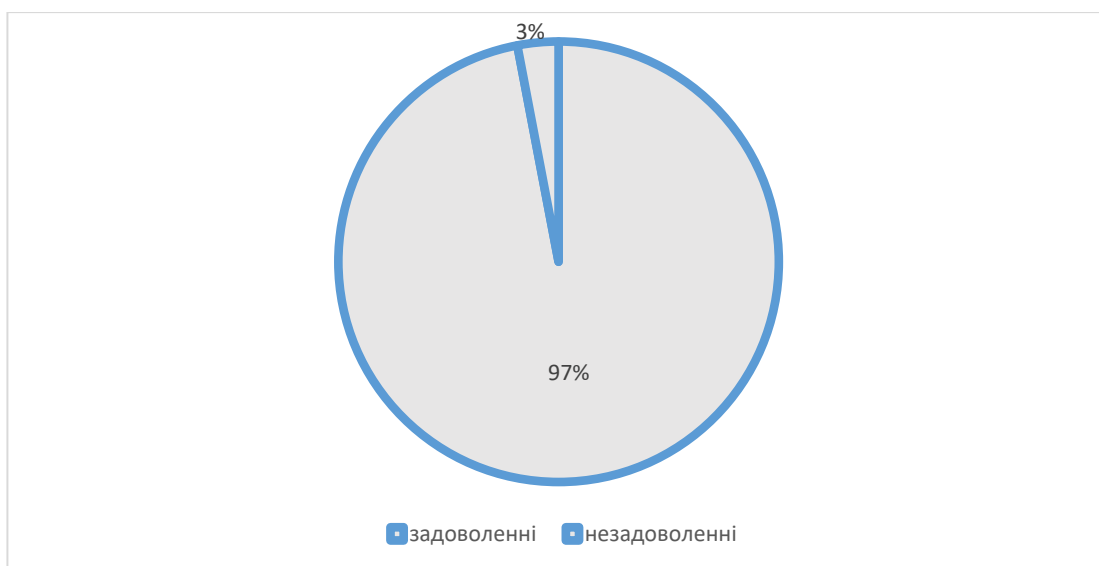


Рис. 3.9 Рівень задоволеності учнів

Ефективність організації роботи учнів на заняттях курсу із використанням інформаційно-комунікаційних технологій підтверджують одержані результати експериментального дослідження. Якість знань, умінь, навичок з математики у 80% учнів на високому і достатньому рівнях, у 50% з них – спостерігається розвиток професійно значущих якостей особистості: самостійності, ініціативності, активності.

Аналіз результатів дослідження показує, що рівень навчальної успішності учнів курсу зріс у 1,6 рази, мотивації – у 1,4 рази, розвитку самостійності, активності, ініціативності – у 1,2 рази. В учнів, що не відвідують курс відповідні показники майже не змінилися. Це свідчить про те, що запропонована нами технологія використання інформаційно-комунікаційних технологій в роботі учнів під час впровадження експериментального дослідження виявилась ефективною.

ВИСНОВОК

При написанні даної роботи використано значну кількість аналітичних, геометричних прийомів та методів, зокрема евристичний аналіз задач лінійного програмування.

Доцільність вивчення задач лінійного програмування у курсі за вибором з використанням інформаційно-комунікаційних технологій обумовлена вмінням учнів обґрунтовувати практичний зміст понять та величин, виражаючи їх у вигляді рівнянь, нерівностей та їх систем. Одержанні за шкільні роки практичні вміння і навички, вагомі компетентності знадобляться їм у подальшому житті.

Розроблений курс за вибором для учнів 9-11 класів формує навички аналізу різних способів та методів знаходження розв'язку на прикладі однієї задачі, що дає можливість зіставляти одержанні результати: стандартність і оригінальність, обсяг обчислювальної роботи, практична цінність, які можуть знадобитися при розв'язуванні інших задач.

Даний курс дає можливість вчителю математики показувати всі допустимі способи знаходження розв'язку прикладних задач, мова йде не лише про аналітичні або геометричні підходи, а й про застосування спеціалізованих комп'ютерних програм.

Використання системи динамічної математики GeoGebra у освітньому процесі дозволяє прискорити, полегшити, візуалізувати обчислення та побудову, що дає можливість динамічно варіювати змінними, для усвідомлення між ними суттєвого зв'язку. Крім того застосування програми дає можливість не лише впорядкувати евристичний пошук, але й звільнити час для здійснення додаткових самостійних досліджень, щоб підтвердити практичну значимість математики та потребу у її вивченні.

Залучення програм динамічної математики до знаходження розв'язку математичних задач не забезпечує знання математичних формул, понять чи функціональних залежностей, проте є тим інструментом, який сприяє формуванню в учнів дослідницьких якостей, математичного мислення та критичного погляду на будь-які твердження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгебра: Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики / [Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С.] – Х.: Гімназія, 2010. – 415 с.
2. Архіпова Т. Л. Вплив нових інформаційних технологій на активізацію навчально-пізнавальної діяльності підлітків. / Т.Л. Архіпова. - С .160-167
3. Барвінський А.Ф. Математичне програмування. Навч. посібник для студентів напрямів «Економіка і підприємство», «Менеджмент» / А.Ф. Барвінський, І.Я. Олексів, З.І. Крупка та ін.; М-во освіти і науки України. Нац. Ун-т «Львів. політехніка». – Л.: Інтеллект-Захід, 2004.
4. Білогурова Г. В. Математичне програмування: конспект лекцій / Г. В. Білогурова, М. І. Самойленко. –Х.: ХНАМГ, 2009. – 72 с.
5. Вінниченко Є. Ф., "Розвиток творчих здібностей старшокласників у процесі навчання інформаційних технологій розв'язування математичних задач"/ Є. Ф. Вінниченко [автореф. дис. канд. пед. наук, Нац пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова]. - Київ, 2006.
6. Вітлінський В. В. Математичне програмування. Навч.-метод. Посібник для самостійного вивчення дисципліни / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. М-во освіти і науки України. КНЕУ. – К.: КНЕУ, 2001.
7. Гриб'юк О.О. Педагогічне проектування комп'ютерно орієнтованого середовища навчання дисциплін природничо-математичного циклу./ О.О. Гриб'юк// Наукові записки. – Випуск 7. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3. – Кіровоград.: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. – С. 38–50.
8. Гриб'юк О.О. Когнітивна теорія комп'ютерно орієнтованої системи навчання природничоматематичних дисциплін та взаємозв'язки вербальної і візуальної компонент / О.О. Гриб'юк // Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» – Додаток 1 до Вип.36, Том IV (64): Тематичний випуск «Вища освіта України

у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – Київ: Гнозис, 2015. – С. 158-175.

11. Гриб'юк О.О. Використання теорії розв'язування дослідницьких задач у контексті проектнодослідницької діяльності в процесі навчання математики / О.О.Гриб'юк, В.Л.Юнчик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // 36. наук. пр. – Випуск 44 / редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016 – С. 153-163.

12. Гриб'юк О.О. Проектно-дослідницька діяльність в процесі навчання математики з використанням системи динамічної математики GeoGebra/ О.О. Гриб'юк, В.Л. Юнчик // Наукові записки. – Випуск 9. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2016. – С. 8–19.

15. Державний стандарт загальної середньої освіти в Україні. Освітня галузь «Математика» Проект. – К.: вид-во «Генеза», 2009 – 63с.

16. Дякон В. М. Математичне програмування: Навч. посібник / В.М.Дякон, Л.Є.Ковальов; за заг. ред. В.М. Міхайленка. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2007.

17. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. I. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. — Х.: Вид-во «Ранок», 2011.— 320 с.

18. Жалдак М. І. Використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим / М. І. Жалдак - Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2013. – №1. – С.10-18.

19. Жалдак М. І., "Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики"/ М. І. Жалдак - http://ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik_KOSN/7/1.pdf.

20. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К.: РННУ "ДІНІТ", 2004. – 252с.

21. Іванченко І.Ю. Математичне програмування. Навч. посібник для студ. вищ. закладів, І.Ю. Іванченко. – К.: ЦУЛ, 2007.
22. Концепція профільного навчання в старшій школі, затверджена рішенням колегії МОН України №1456 від 21.10.2013 року.
23. Корольський В. В., Крамаренко Т. Г., Семеріков С. О., та Шокалюк С. В., Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики. Кривий Ріг, Україна: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009.
24. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі: практикум в Excel: навчальний посібник / А. І. Кузьмичов. – К.: ВПЦ АМУ, 2013. – 438
25. Лященко М. Я. Чисельні методи: підручник / М. Я. Лященко, М. С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
26. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Н. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – Ч.1. – 256 с.
27. Наконечний С.І. Математичне програмування: Навч. посібник / С.І. Наконечний, С.С. Савіна; М-во освіти і науки України. КНЕУ. – К.: КНЕУ, 2003.
28. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах: навчальний посібник / Ю. М. Нефьодов, Т. Ю. Балицька. – К.: Кондор, 2011. – 324 с. 2. <http://maxima.sourceforge.net/ru/index.html>
29. Олійник Т. О. "Використання ІКТ для розвитку критичного мислення"// <http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/1300/1/7.pdf>.
30. Падалко А. М. Методичний посібник до виконання самостійної та індивідуальної роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» для студентів спеціальностей «Облік та аудит» та «Фінанси і кредит» денної форми навчання./ А. М. Падалко, Н. Й. Падалко – Л.: Вежа, 2009
31. Раков С. А. Компьютерные эксперименты в геометрии / С. А. Раков, В. П. Горох. – Х.: МП Регіональний центр нових інформаційних технологій, 1996. – 176с.
32. Ржевський С.В. Лауреати Нобелівської премії з економіки //Науково–

популярний журнал для юнацтва “Країна знань”. – 2003. - № 1. – С.20-24.

33. Семеніхіна О. В. Програми динамічної математики у контексті набуття емпіричного досвіду і формування знань (на прикладі розв’язування задач з параметрами) / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – № 6. – С. 67-74.

34. Семеніхіна О. В. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 та його використання при розв’язуванні задач стереометрії / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Т. 44. – № 6. – С. 124-133.

35. Осадча К. П., "Інформаційно-комунікаційні технології здійснення тьюторської діяльності у системі шкільної освіти", Науково-педагогічний журнал «Молодь і ринок», №9 (128), с. 22–26, 2016.

36. Триус Ю. В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики. Монографія / Ю. В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна. – 2005. – 400 с.

37. Теплицький І. О. Розвиток пізнавальної активності учнів 10-11-х класів у процесі навчання алгебри і початків аналізу засобами комп’ютерно орієнтованих систем навчання / Ілля Теплицький, Олена Віхрова, Сергій Семеріков // Рідна школа. – 2004. – № 6. – С. 48-49.

38. Тютюн Л. А. До питання впровадження сучасних інформаційних технологій у самостійну роботу студентів під час вивчення геометрії / Л. А. Тютюн, О. М. Соя // Математика. Інформаційні технології. Освіта: III міжнар. наук.-практ. конф. (Луцьк-Світязь, 6-8 червня 2014 р.): тези доповідей / орг. ком.: А. А. Федонюк, І. Р. Ковальчук, Т. І. Чепрасова та ін. – Луцьк-Світязь, 2014. – с. 116-118.

39. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування./ Г.Г. Цегелик – Львів, 1995.

Програма курсу за вибором «Задачі лінійного програмування -
математичні моделі життєвої математики» для учнів 9-11 класів

К-сть	Зміст навчального матеріалу	Заняття	Навчальні досягнення учнів
1	2	3	4
5	Тема 1. Поняття математичної моделі в економіці	Заняття № 1. Вступ. Математична модель. Сутність математичної моделі в економіці. Заняття № 2. Методика математичного формування вхідних даних економічної задачі Заняття № 3. Програма GeoGebra, застосування її для розв'язування задач. Заняття № 4. Лінійні нерівності. Система нерівностей Заняття № 5. Графічна інтерпретація розв'язків нерівностей.	Учень (учениця): • має уявлення: - про місце математики в системі наук і про роль математичного моделювання в науковому пізнанні й практиці; - про побудову математичної моделі; • уміє: - визначати необхідні вихідні дані економічної задачі та математично її формувати; - формувати та застосовувати поняття лінійні нерівності; - розв'язувати лінійні нерівності та системи;
2	Тема 2. Загальна структура задачі лінійного програмування.	Заняття № 6. Різні форми запису задач лінійного програмування. Заняття № 7. Стандартна форма Канонічна форма. Максимізація (мінімізація) цільової функції.	Учень (учениця): • уміє: - створювати математичні моделі деяких найпростіших економічних задач; - записувати різні форми задачі лінійного програмування; • має уявлення про найтипівіші економічні задачі;
3	Тема 3. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування	Заняття №8. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування Заняття №9 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування Завдання № 10. Розв'язування задач графічним методом	Учень (учениця): • знає: - різні методи розв'язування задач лінійного програмування; • уміє: - графічно розв'язувати задачі лінійного програмування; - будувати багатокутник розв'язків за обмеженнями задачі і знаходити точку, де лінійна функція набуває оптимального значення;

1	2	3	4
4	Тема 4. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування	Заняття № 11. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування Заняття № 12. Алгоритм симплексного методу Заняття № 13. Геометрична інтерпретація симплексного методу Заняття № 14. Відшукування першого базису	Учень (учениця): • знає: - різні методи розв'язування задач лінійного програмування; - базисні змінні; штучні змінні; - штучний базис; - оптимальний план розширеної задачі; - алгоритм перетворення симплекс-таблиць; • уміє: - розв'язувати задачі лінійного програмування симплексним методом; - створювати вихідний опорний план; - шукати розв'язуючий елемент; - шукати оптимальний розв'язок задачі мінімізації.
10	Тема 5. Задачі, що приводять до лінійного програмування	Задача № 15-16. Задачі оптимального виробничого планування Заняття № 17-18. Задачі на розкрій промислових матеріалів Заняття № 19-20. Задачі оптимального виробничого планування Заняття № 21-22. Транспортні задачі та задачі спеціалізації і кооперування виробництва Заняття № 23-24. Сільськогосподарські задачі	Учень (учениця): • знає типові задачі різних галузей економіки, які розв'язуються методами лінійного програмування; • уміє створювати математичні моделі деяких найпростіших економічних задач.
6	Тема 6. Транспортна задача	Заняття №25. Постановка транспортної задачі та її математична модель Заняття №26. Побудова початкового опорного плану Заняття №27. Метод потенціалів Заняття №28. Відкрита модель транспортної задачі Заняття № 29. Транспортні задачі економічного змісту	Учень (учениця): • знає, що таке: - попит, споживачі; матриця перевезень, матриця витрат; - модифікований розподільний метод; - ланцюг, цикл, ациклічний план, потенціали; - алгоритм методу потенціалів; - метод мінімальної вартості; - метод подвійної переваги; - відкрита модель транспортної

		Заняття № 30. Транспортна задача за критерієм часу	задачі; • уміє: - створювати математичну модель транспортної задачі; - шукати оптимальний план перевезень серед ациклічних припустимих планів; - будувати вихідний опорний план, використовуючи метод мінімальної вартості або метод подвійної переваги; - будувати план перевезень з мінімальними транспортними витратами; • застосовує транспортну задачу до розв'язування деяких економічних задач; • розв'язує транспортну задачу за критерієм часу.
4	Захист проектів. Проведення підсумків.	Заняття 31-34. Представлення презентації та захист проектів.	Учень (учениця): • уміє захистити свої проекти і представляти їх як презентацію, публікацію або веб-сайт, використовуючи комп'ютерні програми.

Методична розробка

Опорні конспекти для курсу за вибором «Задачі лінійного програмування - математичні моделі життєвої математики»

Тема 1. Поняття математичної моделі в економіці

Заняття № 1.

Тема: Вступ. Математична модель. Сутність математичної моделі в економіці.

Мета: окреслити для учнів бачення про суть понять «математична модель» і «прикладна задача» і уміння створювати моделі прикладних задач; покращити уміння знаходити розв'язок рівняння та системи рівнянь графічним способом.

Тип: засвоєння нових знань.

Наочність та обладнання: опорний конспект, презентація вчителя.

Хід заняття

I. Організаційний етап

Вчитель ознайомлює учнів зі змістом курсу, вимогами до знань і умінь учнів згідно навчальної програми, показує практичне значення курсу.

II. Мотивація навчальної діяльності учнів

Вчитель ставить перед учнями проблемне завдання, у вигляді прикладної задачі для усвідомлення ними основних питань курсу.

Постановка задачі.

Цех підприємства «Зебра» реалізує два види фарб: для зовнішніх (К) та внутрішніх (N) робіт. Дана продукція призначена для оптових продаж. Вхідні продукти А і В використовуються для виготовлення фарби. Найбільш ймовірні добові запаси цієї продукції становлять 6 і 8 т відповідно. Витрати А і В на 1 т відповідних фарб наведені у таблиці 3.2.

Спеціалісти, вивчивши ринок збуту, визначили:

- добова потреба на фарбу N ніколи не переважає над потребою в фарбі К, ніж на 1 т. - попит на фарбу N ніколи не перевищує 2 т на добу.

- оптові ціни 1 т фарби становлять: 3 тис. грн. для фарби К, 2 тис. грн. для фарби N.

Таблиця 3.2.

Вхідний продукт	Витрати початкових продуктів на тону, т		Максимальний добовий запас, т
	фарби К	фарби N	
A	1	2	6
B	2	1	8

Яку кількість фарби кожного виду потрібно виробляти цеху, щоб забезпечити

III. Формулювання мети і завдань уроку.

Педагог з учнями провівши аналіз задачі, обговоривши імовірні варіанти знаходження розв'язку задачі, роблять висновки, що в сучасному житті неодноразово ми змушені розв'язувати задачі із різних галузей, які зводяться до конкретних математичних задач, при цьому відобразивши реальні процеси мовою формул, відношень та рівнянь.

Перед учнями ставляться такі завдання на дане заняття: надати означення поняттю, про яке велася мова в обговоренні, а також дослідити способи використання цього поняття.

IV. Вивчення нового матеріалу

Опорний конспект № 1

Таблиця 3.3.

Прикладні задачі в математиці	задачі, які містять нематематичні поняття.
Математичне моделювання	побудова і знаходження розв'язку прикладних задач
Модель	спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта.
Етапи знаходження розв'язку задач з використанням математичного моделювання:	1) Побудова математичної моделі відповідної задачі. 2) знаходження розв'язку даної математичної моделі. 3) Розгляд відповіді.

План вивчення нового матеріалу:

1. Сутність математичної моделі задачі.
2. Схема знаходження розв'язку задачі математичним моделюванням.
3. Зразок знаходження розв'язку практичної задачі математичним моделюванням.

Методичний коментар

Робота над новим матеріалом заняття зводиться до формування абстрактного сприйняття змісту поняття «математична модель». Потрібно акцентувати увагу на тому, що математичну модель можна скласти до умови задачі кожної галузі науки і техніки. Опісля впровадження поняття «математична модель» необхідно надати чим більше випадків використання математичної моделі у прикладних задач, при цьому активізувати безпосередню участь учнів у цій роботі.

Черговим кроком у роботі має стати побудова загальної схеми знаходження розв'язку задач математичним моделюванням. Використання даної схеми необхідно закріпити прикладами.

На закінчення подання нового матеріалу потрібно сформулювати та ілюструвати приклади поняття прикладної задачі.

Дане заняття може проходити у вигляді бесіди згідно підготовленого тексту чи у формі самостійної роботи учнів згідно готового плану .

V. Первинне застосування нових знань.

Поставлену мету можна досягти, здійснивши розв'язання вправ такого змісту:

- 1) створення математичної моделі задачі та знаходження розв'язку задачі;
- 2) завдання для повторення: пригадати методи роботи над нерівностями з однією змінною.

Методичний коментар

Для виконання вправ заняття необхідно домогтися відтворення учнями складеної схеми, крім того потрібно активізувати роботу над свідомим переходом від суті прикладної задачі до її математичної моделі.

VI. Самостійне застосування учнями знань.

Учням пропонується самостійно розв'язати завдання стандартного рівня (тренувальні вправи за зразком, інструкцією, завданням)

VII. Підсумки заняття

Експрес-опитування:

1. Сформулювати поняття «математична модель задачі»?
2. Скласти схему знаходження розв'язку прикладної задачі з використанням математичного моделювання?
3. Аналіз конкретних прикладів та наведення власних прикладних завдань.

VII. Домашнє завдання

Закріпити знання отриманні на занятті, вивчивши нові поняття (див. опорний конспект). Згідно розглянутих прикладів, розв'язати вправи на побудову і знаходження розв'язку математичних моделей прикладних задач. Пригадати способи розв'язання раціональних рівнянь та систем рівнянь з двома змінними.

Заняття № 2.

Тема. Методика математичного формування вхідних даних економічної задачі

Мета. зафіксувати знання учнів про зміст поняття «математична модель задачі», загальну схему знаходження розв'язку задач математичним моделюванням. Сформувати знання для вироблення умінь щодо перекладу умови прикладної задачі на мову математики, розв'язування математичних задач різного змісту складанням рівняння з однією змінною, а також складання систем рівнянь з двома змінними, також удосконалити навички знаходження розв'язку систем рівнянь з двома змінними різними способами згідно одержаних знань на основних уроках математики.

Тип: практичне застосування знань, навичок і умінь.

Наочність та обладнання: опорний конспект, презентація вчителя.

Хід заняття

I. Організаційний момент

Вчитель налаштовує учнів на роботу, перевіряє готовність їх до заняття.

II. Мотивація навчальної діяльності

Оскільки на попередньому занятті було розглянуто прикладні задачі, які досліджуються за допомогою математичного моделювання, то абсолютно доречним буде продовжити на даному занятті роботу з формування вмінь учнів шукати шляхи знаходження розв'язку задачі на побудову математичних моделей, опрацювавши задачі підвищеного рівня складності та додатково задачі другого змісту.

III. Осмислення змісту й послідовності застосування способів виконання дій

1. Створити математичну модель задачі.
2. Показати зв'язок математичних обчислень та економічних процесів.
3. Навести зразки економічних задач

Опорний конспект № 2.

Таблиця 3.4.

Математична модель	побудова конкретного об'єкта чи процесу за підтримки мови математичних понять, відношень, рівнянь і т.д.
Алгоритм знаходження розв'язку задачі математичним моделюванням	1. Перекласти задачу на мову математики, тобто створити математичну модель 2. Знайти знаходження розв'язку одержаної математичної задачі. 3. Дослідити та записати математичний розв'язок мовою, на яку була перекладена дана задача.

Методичний коментар

При рішенні задач за підтримки математичного моделювання доречно виокремити три етапи:

- 1) Побудова математичної моделі даної задачі.

При аналізі задачі на даному етапі варто приділити увагу виділенню істотних факторів, що впливають на вивчене явище чи вибраний процес. При цьому слід пам'ятати, що будь-яка модель має деякі недоліки, які необхідно за допомогою простих та зручних методів зможти оцінити.

2) Знаходження розв'язку конкретної математичної моделі.

Для досягнення успіху на другому етапі необхідно вміло переходити від однієї моделі до іншої, виконуючи аналіз кожного кроку роботи над задачею, при цьому відшукати найраціональніший метод розв'язку.

3) Аналіз відповіді.

На даному етапі актуально не просто знайти математичний розв'язок задачі, а зробити правильне його тлумачення, встановити значення деяких розв'язків, відшукати практичні способи перевірки одержаних розв'язків, здійснити аналіз знайденого результату.

IV. Самостійне виконання учнями завдань під контролем і за допомогою вчителя

Приділити увагу розв'язанню письмових вправ, зокрема такого змісту: задачі на побудову математичних моделей (на прямолінійний рівномірний рух, на сумісну роботу, геометричні задачі і т.д.);

Методичний коментар

При виконанні всіх запропонованих, вправ щоб домогтися закріплення знань учнів та свідомого виконання дій, необхідно спонукати учнів до коментарів, які б спиралися на матеріал заняття.

V. Підсумки заняття

Підсумком засвоєння опрацьованого матеріалу даних занять стане усвідомлення учнями того факту, що розв'язання текстових задач всілякого змісту як складанням рівняння з однією змінною, так і складанням системи рівнянь з двома змінними у 7—9 класах здійснювалося за алгоритмом, розглянутим на даних заняттях. Звідси випливає, що поняття математичного моделювання при рішенні прикладних задач є узагальненням тих способів знаходження розв'язку рівнянь, якими учні оволоділи впродовж вивчення математики у попередніх класах.

VI. Домашнє завдання

Відтворити алгоритм знаходження розв'язку задач, побудовою математичної моделі, знайти розв'язок задач, спираючись на використання даного алгоритму (аналогічні за змістом вправам, розв'язаним у класі).

Заняття № 3

Тема: Програма GeoGebra, застосування її для знаходження розв'язку задач лінійного програмування.

Мета: закріпити вміння застосовувати набуті знання для розв'язувати задачі, акцентувати увагу на основному, описувати, аналізувати, оцінювати, застосовувати на практиці, формувати вивченні способи розв'язування проблеми, виробити сталі вміння використовувати набуті знання при рішенні завдань різних рівнів, поглибити знання учнів щодо напрямів використання властивостей функції, активізувати бачення про графічний спосіб рішення рівнянь з двома змінними, продемонструвати навчальну програму GeoGebra, обучити знаходженням методів розв'язання рівняння за допомогою програми GeoGebra.

Тип: засвоєння нових знань

Наочність та обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, інстальована та онлайн версії програми GeoGebra.

Хід заняття

I. Організація класу

Вчитель в ігровій формі спостерігає за готовністю учнів до заняття, налаштовує їх на роботу.

II. Мотивація навчальної діяльності

В реаліях сучасного суспільства розкриваються технології, які застосовуються в навчанні підростаючого покоління. Поширення портативних девайсів (КПК, смартфонів, планшетів) та впровадження мобільних і змішаних технологій навчання спричиняють активізацію науково-методичних пошуків у напрямі застосування предметно-орієнтованих програмних середовищ. У навчанні математики акцентують увагу на програмах динамічної математики. У таких програмах розробники передбачають можливість динамічного

варіювання вихідними математичними об'єктами для візуалізації їх властивостей.

Для подальшої роботи ми обираємо програму GeoGebra як одну з найпотужніших та вільно поширюваних. Кожна нова версія програми збагачується послугами і розширює напрямки її використання не лише у галузі шкільної математики.

III. Актуалізація опорних знань

1. Алгоритм знаходження розв'язку задач шляхом побудови математичної моделі
2. Типи задач на побудову математичних моделей (на прямолінійний рівномірний рух, на сумісну роботу, геометричні задачі тощо);

IV. Вивчення нового матеріалу

На сьогоднішньому занятті ми познайомимся з прикладною програмою GeoGebra, дізнаємося основні її функції та методи роботи.

Отже, GeoGebra – безкоштовна програма з універсальним набором функцій для повноцінного геометричного проектування. Серед основних можливостей програми. Основними напрямками роботи програми являються операції з координатною сіткою, статистичними або арифметичними операціями, таблицями тощо. Крім того дана комп'ютерна система дає можливість за допомогою великої кількості інструментів обчислювати корені рівнянь та знаходити точки екстремуму, працювати з похідними або інтегралами від функцій, створювати креслення, аналізувати та досліджувати двовимірні та тривимірні графіками.

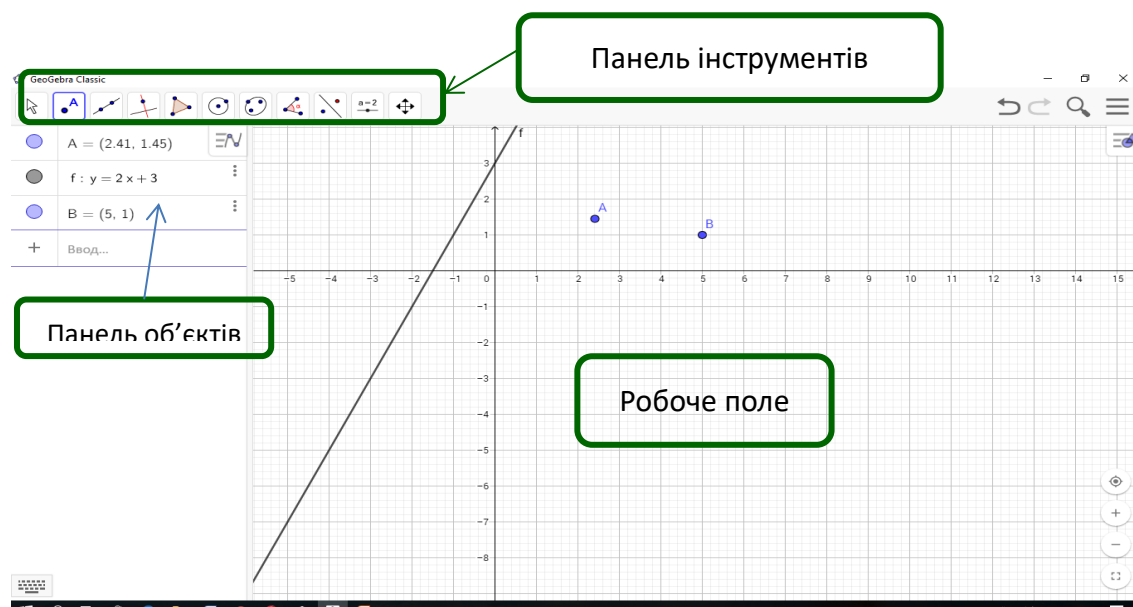


Рис. 3.1. Вікно програми GeoGebra

Посібник з програми GeoGebra <https://static.geogebra.org/book/intro-ru.pdf>

Опис панелі інструментів

https://drive.google.com/file/d/0B5v29f_pNRDiamRJYU5rcC1QdG8/view

Онлайн версія програми <https://www.geogebra.org/graphing>

V. Засвоєння нових знань, набуття вмінь та навичок

Сьогодні ми з Вами поговоримо про знаходження розв'язку рівнянь графічним методом за підтримки програми GeoGebra із застосуванням технологічної карти

Методичний коментар

Геометричний метод знаходження розв'язку рівнянь та нерівностей частенько створюють труднощі у учнів, в тому числі і в дітей з рівнем математичної освіти вище середнього. Дані задачі, через незвичний для типових вправ спосіб визначення умови і пошук відповіді, рахуються складними. Адже, в них необхідно виокремити задані величини, створити функцію, яка відстежить взаємозв'язок між цією величиною і шуканою, а тоді ще й дослідить цю функцію. Ці дії не усвідомлюються середньостатистичними учнями, тому що потребують уже сформованих додаткових геометричних понять та аналітичних умінь. Конструктивні підходи до знаходження розв'язку даних задач, дослідженні у програмах динамічної математики, дають можливість зекономити час на аналітичних розрахунків і на перший план виноситься потреба в уміннях змодельовати необхідну побудову, врахувати залежності між її параметрами, візуалізувати деякі функції ймовірних результатів, навіть «вгледіти» шукану функцією.

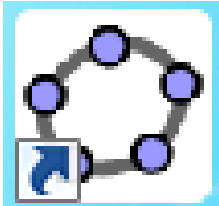
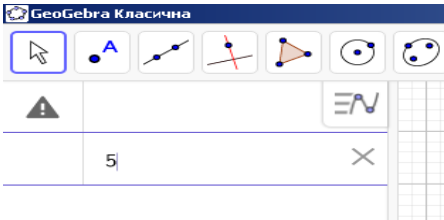
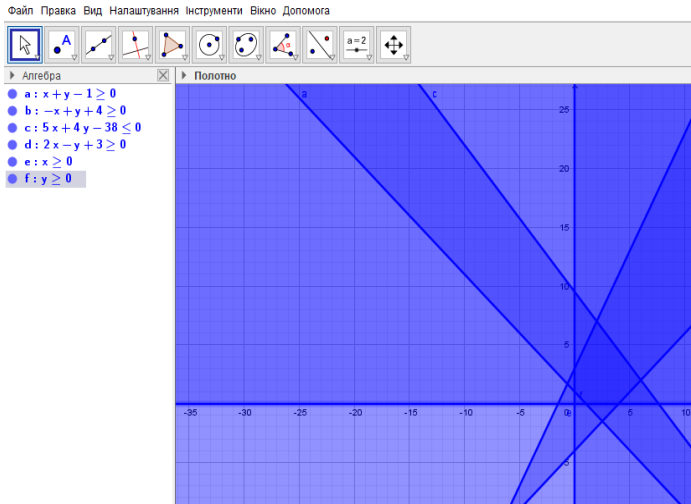
Завдання 1. Розв'язати систему:

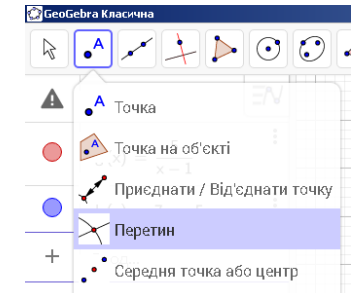
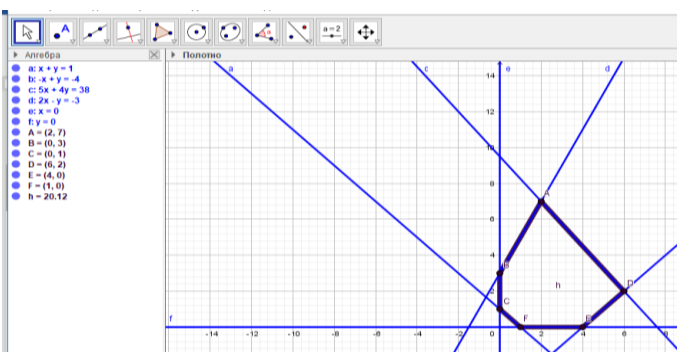
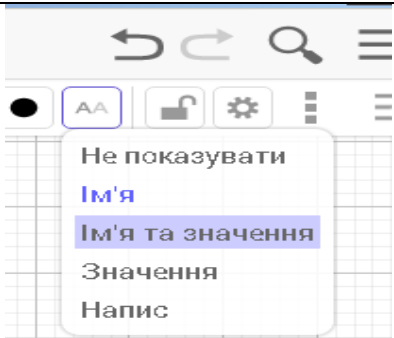
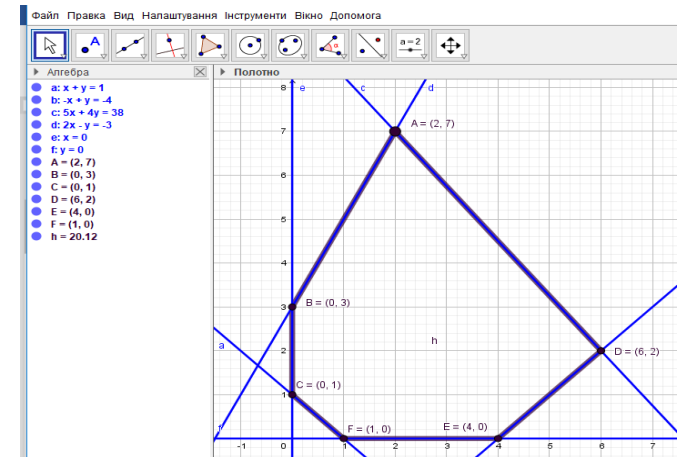
$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ -x + y + 4 \geq 0, \\ 5x + 4y - 38 \leq 0, \\ 2x - y + 3 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

Методичний коментар

Для розв’язання даного завдання на координатній площині створюємо графіки нерівностей, які являються межами півплощин. Саме такі півплощини становлять множину розв’язків для кожної нерівності окремо. Розв’язок системи являє собою багатокутник, побудований перетином півплощин (табл 3.5.).

Таблиця 3.5.

Візуалізація побудови	Алгоритм побудови
1	2
	1. Відкрийте програму GeoGebra за допомогою ярлика
	2. Ознайомтесь з інтерфейсом програми.
	3. У рядок введення даних введіть по черзі функції $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ -x + y + 4 \geq 0, \\ 5x + 4y - 38 \leq 0, \\ 2x - y + 3 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$ Програма побудує графік – пряма

	4. Виберіть на панелі інструментів Точка → Перетин
	5. Коренями нерівностей є многогранник ABCDEF
1 	2 6. Оберіть точку, що утворилася і змініть її стиль на «Ім'я та значення». Цю операція є доступною і перед тим, як встановити точку.
	7. Вершини многогранник ABCDEF –є коренями нерівності. Перевіряємо їх сумісність.

VI. Творче перенесення знань і навичок у нові ситуації (творча робота)

Проаналізувавши наведений приклад разом з вчителем, самостійно знайти розв'язки систем нерівностей за допомогою програмного забезпечення GeoGebra

VII. Підсумок заняття

Розглянути роботу програми GeoGebra. Дайте характеристику недоліків та переваг даного програмного забезпечення.

Вправа «незакінчене речення»:

Мені було новим...

Було цікаво...

Мені ще треба попрацювати над....

Хотілося б...

VII. Домашнє завдання.

Знайти розв'язок системи нерівностей з використанням онлайн версії програми Geogebra. Результати подати вчителю на флеш-носії або адресувати на електронну адресу.

Заняття 4.

Тема: Лінійні нерівності. Системи нерівностей

Мета: пригадати основоположні факти, без яких практично розв'язати лінійні нерівності та системи нерівностей неможливо; відкривають перед учнями велику кількість евристичних, алгоритмічних прийомів загального характеру, які являються цінними для розвитку математичного апарату, використання і дослідження їх на будь-якому другому математичному матеріалі.

Тип: формування вмінь і навичок

Наочність та обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, інсталювана та онлайн версії програми GeoGebra.

Хід заняття

I. Організаційний момент

Аналогічні завдання ми вже робили на основних уроках математики, тому сьогодні у вас дані завдання не викликають жодних труднощів. Попробуємо прикріпити успіх.

II. Мотивація навчальної діяльності

З впевненістю можна засвідчити, що не велика кількість сучасних випускників вміють роз'яснити, як зробити державу багатішою і які наслідки має передача землі в заставу. Дійсно випускник нинішньої школи володіє низькими знаннями про сукупність економічних методів, що характеризують умови виживання людства і його прогресу. Адже, такі поняття як депозит, банківський відсоток, акція, дивіденди, інфляція, курс валют, банкрутство, ринкові ціни формують фон, через який проходить життя нашого суспільства.

Економічні знання і мислення створюються не тільки при вивченні курсу економіки, але й при вивченні усього комплексу предметів, який навчається у школі. В першу чергу це такі предмети, як математика та інформатика, історія та географія й інші. Насиченню математики економічним змістом приділяється велика увага в сучасній освіті.

III. Первинне формування вмінь

План заняття.

1. Лінійна нерівність
2. Система нерівностей

Опорний конспект № 3

Таблиця 3.6.

Лінійна нерівність	нерівність, яка і зліва і справа подана у вигляді лінійної функції щодо невідомої змінної
Загальний вигляд	$ax + b > cx + d$.
Приклад	$3x + 5 \geq -6 + 2y$; $5y > 5 - 8x$; $9x \leq 1$; $5x - y < 0$
Система нерівностей	об'єднання кількох нерівностей, які містять ті ж самі змінні
Розв'язком системи	всі значення невідомих, які справедливі для кожної нерівності системи.

Методичний коментар

Лінійною вважається нерівність, обидві частини якої представлена у вигляді лінійної функції щодо невідомої змінної. До неї входять нерівності, як $3x + 5 \geq -6 + 2y$; $5y > 5 - 8x$; $9x \leq 1$; $5x - y < 0$ і т.д. Лінійна нерівність записується в загальному виді так: $ax + b > cx + d$.

Якщо у нерівності $ax + b > cx + d$: cx перенести вліво, а b – вправо, то одержимо $(a - c)x > d - b$. Отже, кожен лінійну нерівність можна подати у виді $mx > n$ чи $mx < n$, $mx \geq n$, $mx \leq n$, де m і n – деякі числа, а x – невідоме.

У випадку, коли $m > 0$, значення $x > \frac{n}{m}$, якщо $m < 0$, значення $x < \frac{n}{m}$.

Геометрично це можна відобразити так:

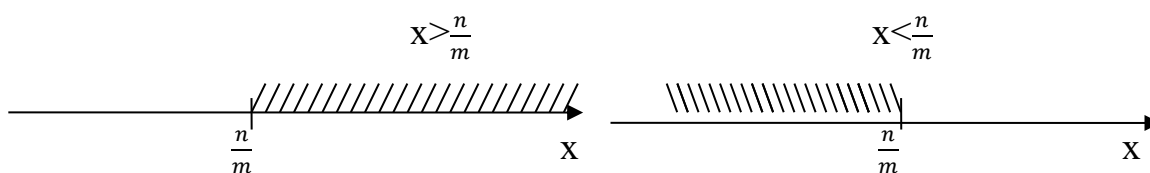


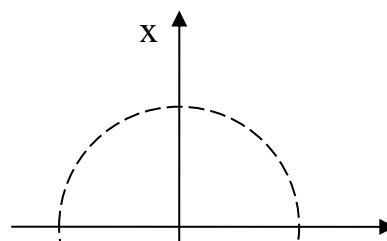
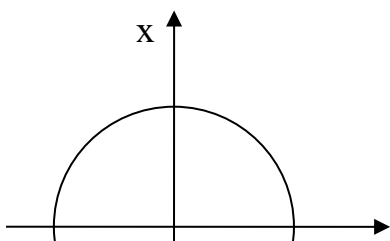
Рис. 3.2. Геометрична інтерпретація лінійної нерівності

Коли $m = 0$, тоді нерівність набуває виду $0 \cdot x > n$.

Необхідно зазначити, що у випадках, коли n приймає від'ємних значень, то нерівність справджується для всіх значень x , а коли n – невід'ємне, то нерівність розв'язків немає.

Система нерівностей являє собою об'єднання кількох нерівностей, що складаються з однієї і тієї ж змінної, а розв'язок системи нерівностей – це сукупність всіх значення невідомих, для яких справджується всі нерівності системи.

Розв'язок систем нерівностей з двома змінними можна зобразити на координатній площині. В загальному випадку зображенням множини розв'язків нерівності $f(x; y) > 0$ або $f(x; y) \geq 0$ утворює на площині фігуру. Наприклад, множина розв'язків нерівності $x^2 + y^2 \leq r^2$ утворює круг з центром у початку координат і радіусом r . Зауважимо, що коли нерівність строга, то границя півплощини не належить до множини розв'язків, а коли нерівність нестрога – належить.



у

у

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$x^2 + y^2 < r^2$$

Рис. 3.3. Геометрична інтерпретація розв'язку системи лінійних нерівностей

IV. Творче застосування знань і вдосконалення вмінь

Далі на занятті увага приділяється письмовим вправам, при чому для виконання поставленої мети слід виконати вправи такого змісту: розв'язати лінійну нерівність та систему нерівностей, а також задачі на основі побудови системи нерівностей.

V. Підсумки заняття

Експрес-опитування:

1. Розкрийте суть лінійної нерівності.
2. Пригадайте як розв'язати систему лінійних нерівностей.
3. Наведіть приклад прикладної задачі, які ґрунтуються на побудові системи нерівностей.

VI. Домашнє завдання

Вивчити новий матеріал, розглянутий на занятті, розв'язати вправи на складання та дослідження системи нерівностей.

Заняття № 5.

Тема: Графічна інтерпретація розв'язків нерівностей.

Мета: сформулювати уявлення про графічну інтерпретацію розв'язків нерівності; освоєння геометричних прийомів знаходження розв'язку задач як рівноправних з аналітичними методами; показати, що використання графічних методів пришвидшує і полегшує роботу в декілька разів.

Тип: формування навичок і вмінь

Наочність та обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, інсталювана та онлайн версії програми GeoGebra.

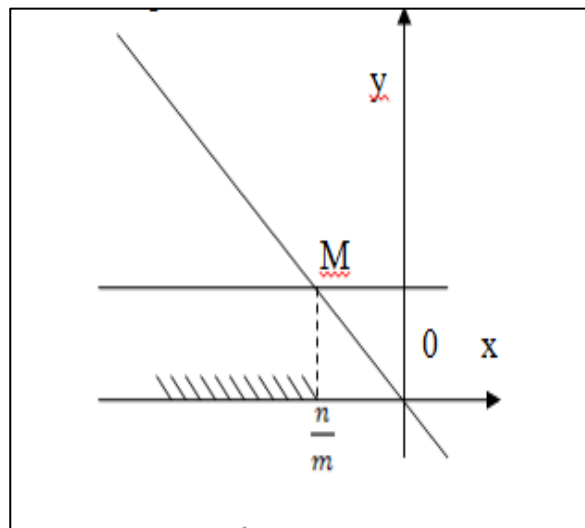
Хід заняття

I. Організаційний момент

Сьогодні у нас незвичайне заняття. Отже не будемо гаяти часу і дізнаємося про що воно.

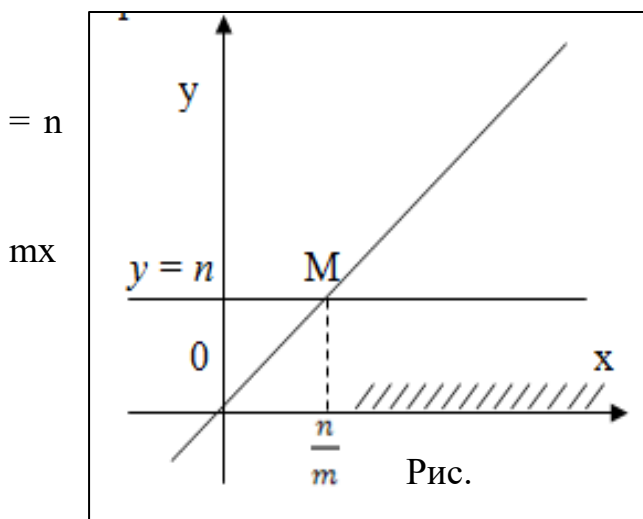
II. Мотивація навчальної діяльності

Не існує такої галузі людської діяльності, в які не входили б такі поняття, як функції, рівняння, нерівності та їх геометрична інтерпретація.



III Первинне формування вмінь

Графічна інтерпретація розв'язків нерівності являє собою класичний графічний спосіб знаходження розв'язку нерівності виду $mx > n$.

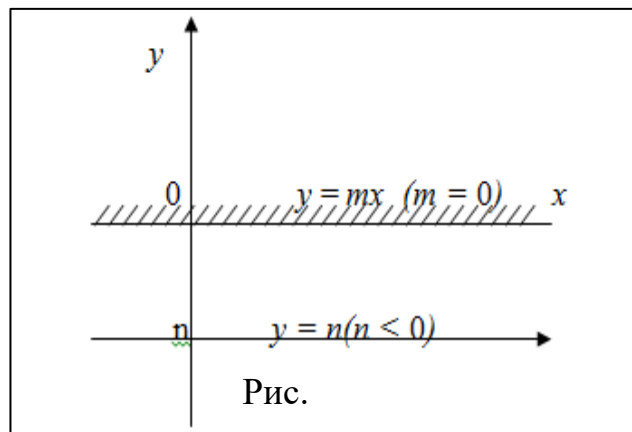
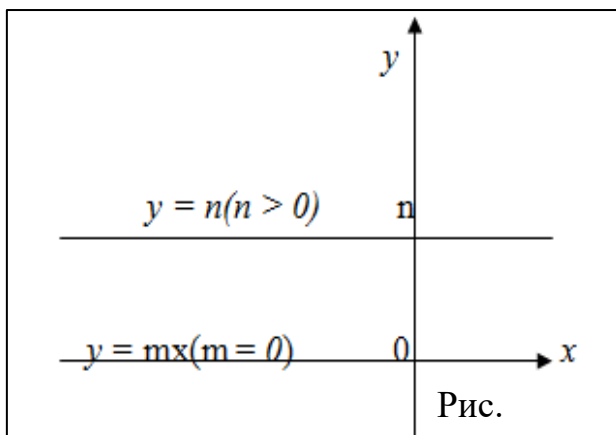


Графіки двох функцій $y = mx$ і $y = n$ будуються на одній системі координат. Якщо $m \neq 0$, то пряма $y = mx$ неодмінно перетне пряму $y = n$. Помітимо точку перетину прямих через M . Абсциса цієї точки означає корінь рівняння $mx = n$ і вона рівна $\frac{n}{m}$.

Коли $x > \frac{n}{m}$, то mx буде більше n для

всіх x більше $\frac{n}{m}$ (рис. 3.4.)

Коли $m < 0$, то mx буде менше n для всіх x менших $\frac{n}{m}$ (рис. 3.5.). При $m = 0$ пряма $y = mx$ співпадає з віссю абсцис. Якщо при цьому n від'ємне, то кожне значення x справджується для нерівності $mx > n$ (рис. 3.6.), а коли n невід'ємне, то розв'язків у рівняння не буде (рис. 3.7.).



IV. Творче застосування знань і вдосконалення вмінь

Методичний коментар

Спосіб розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною ґрунтується на застосуванні властивостей нерівностей і має досить формальний характер, а тому його можна записати у вигляді системи вказівок:

1. Розкрити в кожній частині нерівності дужки і звести кожен до суми кількох доданків. (Може трапитись так, що в одній або обох частинах нерівності після цього перетворення залишиться лише один доданок).
2. Усі доданки, що містять змінну, перенести в ліву частину нерівності.
3. Усі доданки, що не містять змінну, перенести вправу частину нерівності.
4. У лівій частині нерівності винести за дужки змінну.
5. Якщо коефіцієнт при змінній не дорівнює нулю, то обидві частини нерівності поділити на коефіцієнт при змінній і поставити відповідний знак нерівності залежно від знака коефіцієнта при змінній.

6. Якщо коефіцієнт при змінній дорівнює нулю, то можливі такі випадки:

а) $0 \cdot x \leq 0$; $0 \cdot x \geq 0$. Будь-яке число є розв'язком кожної нерівності;

б) $0 \cdot x < 0$; $0 \cdot x > 0$. кожна з нерівностей не має розв'язків;

в) $0 \cdot x < a$. Якщо $a > 0$, будь-яке число є розв'язком нерівності. Якщо $a < 0$, нерівність не має розв'язків.

г) $0 \cdot x > a$. Якщо $a > 0$, нерівність не має розв'язків. Якщо a – від'ємне число, то будь-яке число є розв'язком нерівності.

Під час розв'язання системи нерівностей важливо домогтись, щоб учні розуміли, що розв'язком систем нерівностей є переріз множин розв'язків нерівностей, що входять у систему.

V. Підсумок заняття

Давайте з вами повторимо основні моменти сьогоднішнього заняття

VI. Домашнє завдання

Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь

Тема 3. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Заняття № 8.

Тема: Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Мета: сформулювати уявлення про графічну інтерпретацію розв'язків задач лінійного програмування; освоєння геометричних прийомів знаходження розв'язку задач як рівноправних з аналітичними методами; показати, що використання графічних методів з допомогою програми GeoGebra пришвидшує і полегшує роботу в декілька разів.

Тип: засвоєння нових знань

Наочність і обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, інсталювана та онлайн версії програми GeoGebra.

Хід заняття

I. Організаційний момент

Налаштування учнів на роботу, перевірка наявності програми GeoGebra на робочих комп'ютерах.

Сукупність цих точок (розв'язків) являє собою многокутник рішень, чи область допустимих розв'язків задачі лінійного програмування. Якщо задача має єдиний розв'язок, то розв'язок має вигляд точки, а також відрізок, промінь, многокутник, необмежена многокутна область. Якщо дана система обмежень має три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами якого будуть:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i (i = 1, 2, \dots, m), \quad (b)$$

а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0 (j = 1, 2, 3)$, де i - номер обмеження, а j - номер змінної. У випадку суміжності системи обмежень, ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, створюють у тривимірному просторі спільну частину, що називається многогранником розв'язків. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, многогранником, многогранною необмеженою областю.

Нехай у даній системі обмежень кількість змінних більша, ніж три: $x_1, x_2, \dots, x_n$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n -вимірного простору з граничною гіперплощиною

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{in}x_n = b_i (i = 1, 2, \dots, m)$$

Кожному обмеженню відповідають гіперплощина та напівпростір, котрий лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0 (j = 1, 2, 3)$.

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона створює спільну частину в n -вимірному просторі — опуклий многогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування демонструє знаходження координат такої точки многогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набула максимального (мінімального) значення, причому допустимими рішеннями є усі точки многогранника розв'язків.

Цільову функцію $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ в n -вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких позначається значенням параметра Z .

Основні ознаки розв'язків задачі лінійного програмування представлені у вигляді чотирьох теорем.

Теорема 1.

Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Теорема 2.

Якщо задача лінійного програмування приймає оптимальне значення, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція приймає екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Теорема 3. Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0, X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ є кутовою точкою многогранника розв'язків.

Теорема 4.

Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - кутова точка многогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0, X \geq 0$, що відповідають додатним x_j , є лінійно незалежними.

Наслідки:

1) Оскільки вектори $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають розмірність m , то кутова точка многокутника розв'язків має не більше, ніж m додатних компонентів

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

2) Кожній кутовій точці многокутника розв'язків відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, \dots, A_n$.

IV. Застосування нових знань у стандартних ситуаціях

Проаналізуємо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі.

Задача 1. Фермер, враховуючи особливості аграрного сектору регіону, вирішив вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, при цьому під цукрові буряки виділив не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур подані у табл. 3.7:

Таблиця 3.7.

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-дні	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-дні	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	-
Прибуток, тис. грн.	0,7	1	-

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Побудуємо економічно-математичну модель структури вирощування озимої пшениці та цукрових буряків, зробивши такі позначення:

x - шукана площа посіву озимої пшениці, га

y - шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задачу лінійного програмування можна зобразити у такому вигляді:

$\max Z = 0,7x + y$ за умов:

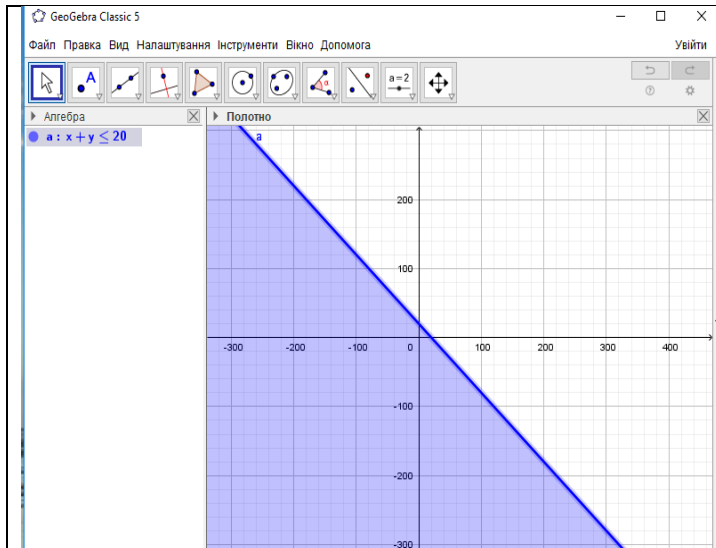
$$\begin{cases} x + y \leq 20; \\ 5x + 25y \leq 270; \\ 2x + 8y \leq 80; \\ y \geq 5; \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм геометричної інтерпретації задачі подано у вигляді таблиці 3.8.

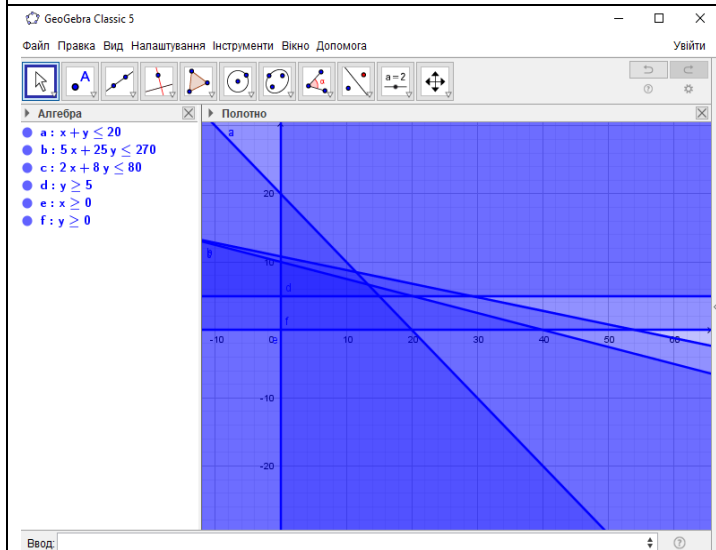
Правило-орієнтир розв'язування задачі

Таблиця 3.8.

Візуалізація побудови	Інтерфейс	Алгоритм побудови
1	2	3

Ввод: $x+y \leq 20$

1. Будуємо пряму $x + y \leq 20$. Визначаємо півплощину, яка відповідає вхідним обмеженням нерівності.

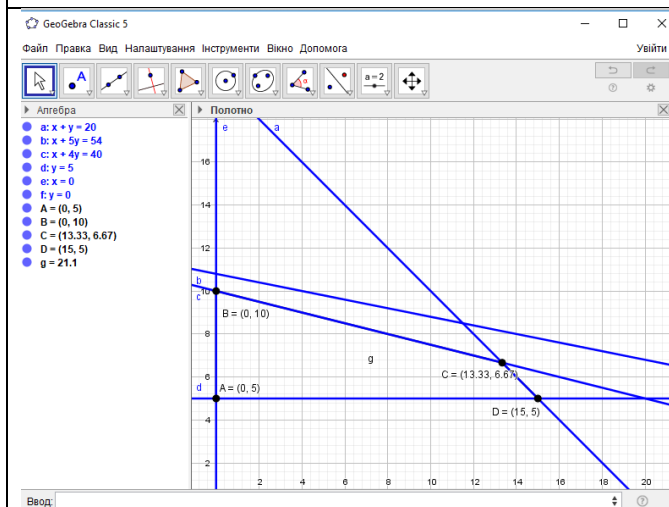


2. Аналогічно будуємо прямі
 $5x + 25y \leq 270$;
 $2x + 8y \leq 80$;
 $y \geq 5$;
 $x \geq 0, y \geq 0$.

1

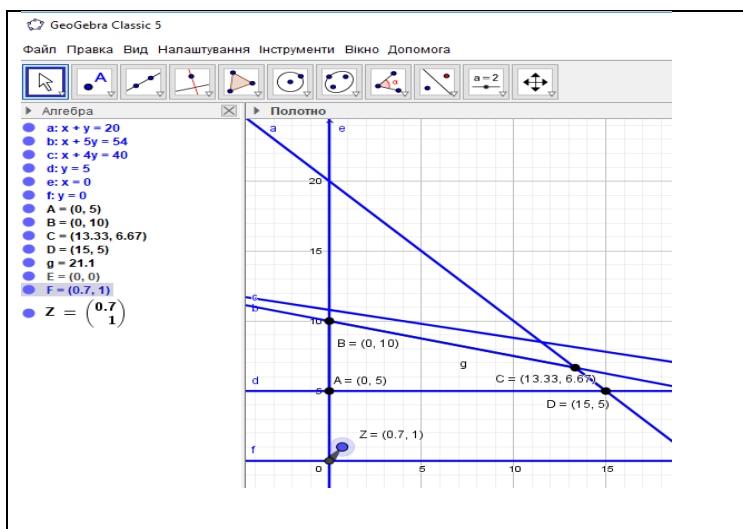
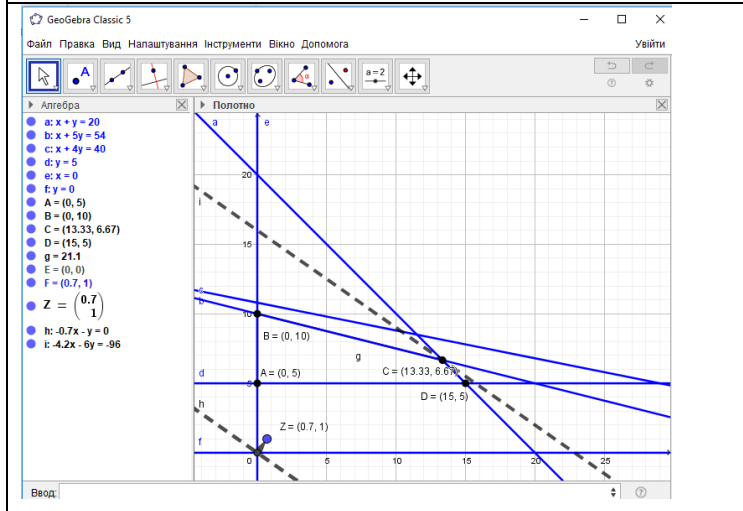
2

3



Ламана

3. У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (чотирикутник ABCD).

	 Вектор	4. Будуємо вектор $\vec{Z} = 0,7x + y$
	 	5. Будуємо перпендикуляри до вектора $\vec{Z}$. 6. Найбільше значення в т. С (13; 7)

Область допустимих розв'язків цієї задачі одержуємо так. Кожне обмеження, наприклад $x + y \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x + y = 20$. Побудуємо пряму та з'ясуємо півплощину, яка описується нерівністю $x + y \leq 20$. Для цього нам необхідно відшукати координати характерної точки, підставити в нерівність, скажімо, $x=0$ і $y=0$. Пересвідчуємося, що ця точка припадає півплощині $x + y \leq 20$. Цей випадок ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. За такою ж аналогією побудуємо півплощини, які відповідають й іншим нерівностям.

У результаті перетину цих півплощин виникає область допустимих розв'язків задачі (чотирикутник ABCD).

Цільова функція $Z=0,7x+y$ представляє множину паралельних прямих, будь-які з них відповідають певному значенню Z . Зокрема, якщо $Z = 0$, то

одержимо $0,7x+y=0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z=3,5$, то маємо пряму $0,7x+y=3,5$.

V. Підсумок заняття

З вище вказаних ознак можна зробити висновок, що якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на многограннику розв'язків, то:

- 1) існує така кутова точка многогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал сягає свого оптимального значення;
- 2) кожний опорний план відповідає кутовій точці многогранника розв'язків.

Тому для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки многогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

VI. Домашнє завдання

1. Сформулювати алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом
2. Розв'язати задачу згідно прикладу, розглянутого на занятті

Заняття № 9.

Тема: Графічний метод знаходження розв'язку задач лінійного програмування

Мета: узагальнити знання про графічну інтерпретацію рішень задачі лінійного програмування; фактично закріпити геометричних прийомів знаходження розв'язку задач як рівноправних з аналітичними методами; показати, що використання графічних методів з підтримкою програми GeoGebra пришвидшує і полегшує роботу в декілька разів.

Тип: застосування знань, вдосконалення умінь та навичок

Наочність і обладнання: опорний конспект, презентація вчителя, запуск інстальованої або онлайн версії програми GeoGebra.

Хід заняття

I. Організаційний момент

4. У випадку коли область $D \neq 0$ у напрямку вектора N перемістити одну з ліній рівня. При цьому або наступить момент коли лінія рівня стане опорою (область D буде розміщена по один бік лінії рівня, але хоч одна точка буде належати даній лінії рівня) або стане зрозумілим, що жодна лінія не може бути опорною. Якщо опорна лінія рівня існує, то оптимальним розв'язком задачі будуть ті точки, які лежать на опорній лінії. При розв'язанні задачі лінійного програмування на максимум лінію рівня переміщують у напрямку вектора $\bar{N}$, а при розв'язанні на мінімум у напрямку вектора $-\bar{N}$.

Розглянемо окремі випадки, які трапляються при знаходженні розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом:

1. Опорній лінії належать лише одна точка $x \in D$. Це свідчить про те, що задачі належить єдиний оптимальний розв'язок.
2. Опорній лінії належить нескінченна множина точок $x \in D$, яка збігається з однією із сторін допустимого многокутника розв'язків у цьому випадку задача лінійного програмування має нескінченну множину розв'язків.
3. Область $D=0$. Задача не має розв'язків.
4. Задача не має розв'язків. Область необмежена і не існує опорної лінії.

IV. Творче застосування знань і вдосконалення вмінь

Задача 2.

Для виготовлення двох видів товарів А і В фірма застосовує три види комплектуючих. Норми витрат комплектуючих певного виду на виробництво одиниці продукції даного виду приведені в табл.3.9.

Таблиця 3.9

Види комплектуючих	Витрата комплектуючих, шт, на один виріб		Загальна кількість комплектуючих, шт
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, грн.	30	40	

У табл.3.9. наведені також прибуток від реалізації одного товару кожного виду і загальна кількість комплектуючих даного виду, котрі можуть використовуватися фірмою.

Зважаючи, що товари A і B можуть виготовлятися у будь-яких країнах, необхідно окреслити такий план їх випуску, в якому прибуток фірми від реалізації всіх товарів набуде максимального значення.

Ймовірно, що фірма створить x товарів виду A і y товарів виду B. У зв'язку з тим, що виробництво продукції обмежене комплектуючими кожного виду, які є у розпорядженні фірми і кількість товарів, котрі виробляються, не може бути від'ємною, то повинна виконуватися система нерівностей:

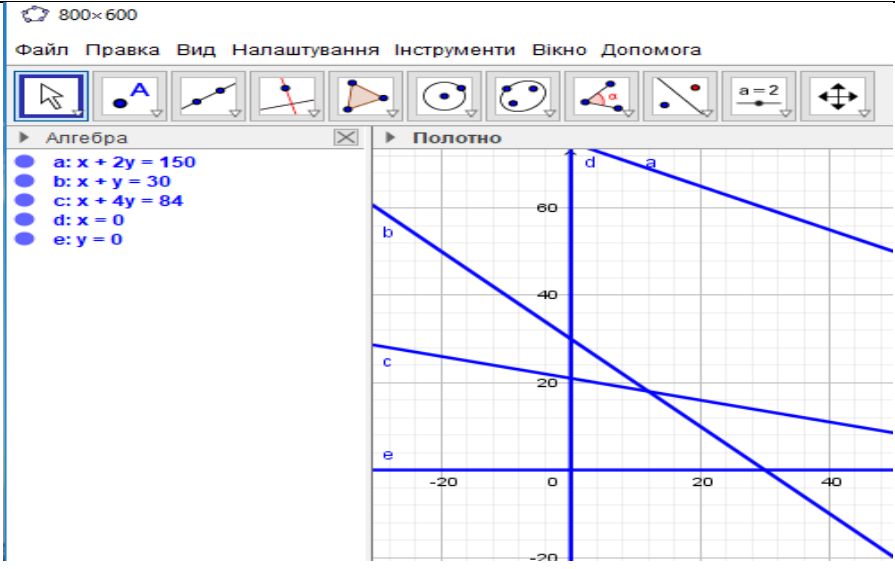
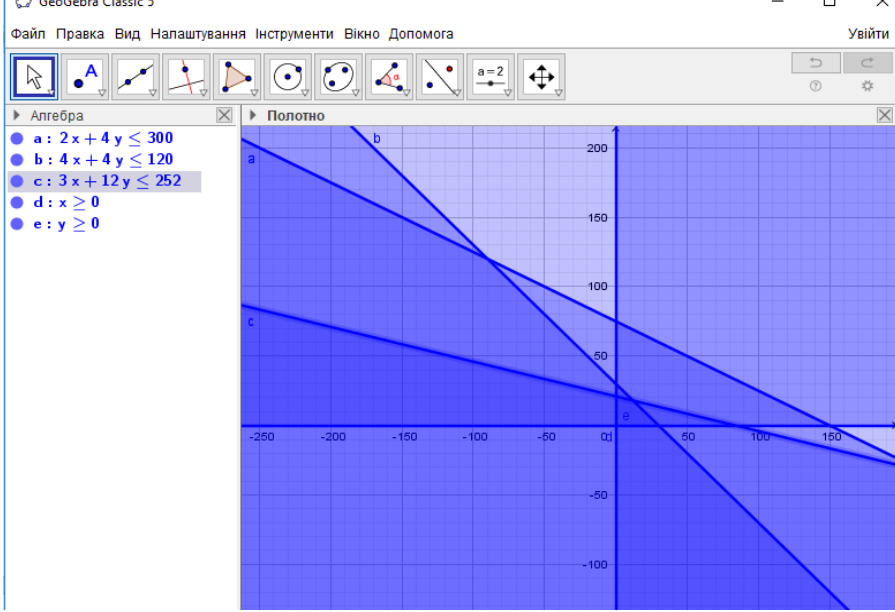
$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 300; \\ 4x + 4y \leq 120; \\ 3x + 12y \leq 252 \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

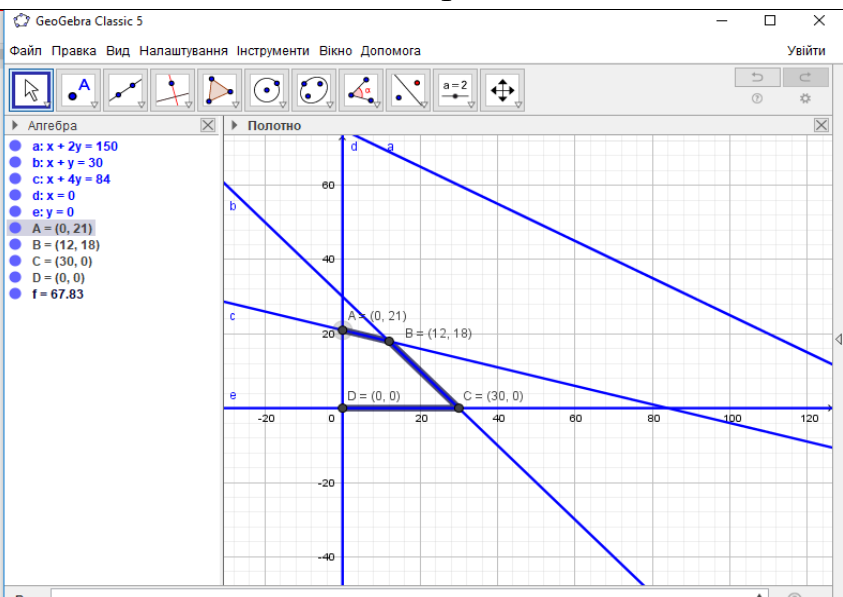
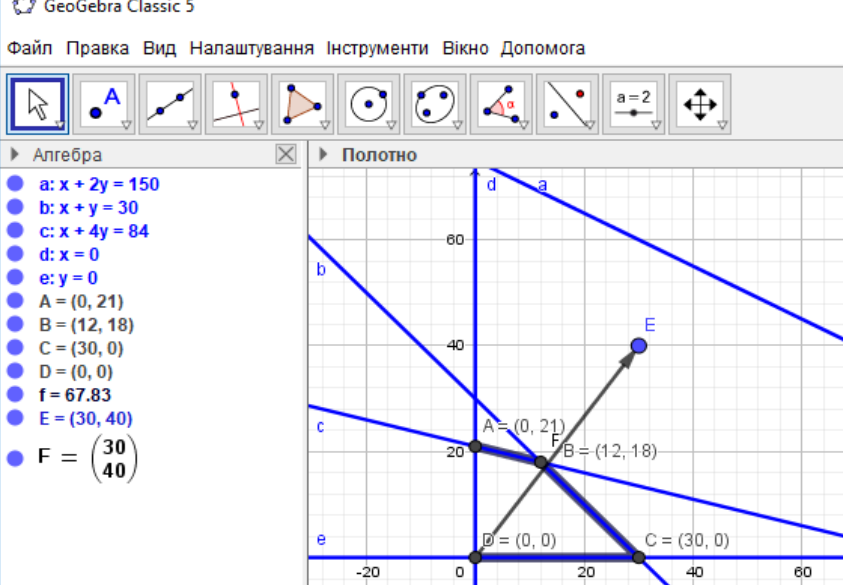
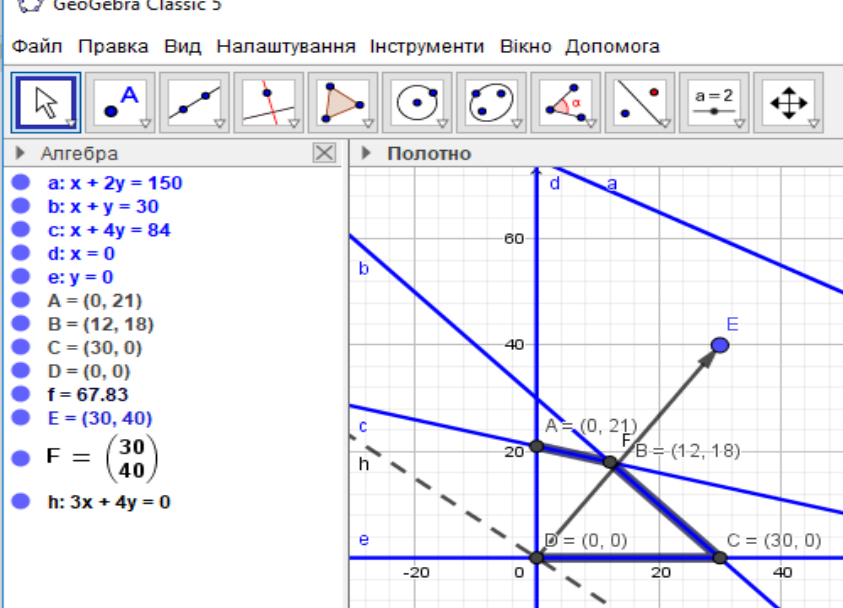
Загальний прибуток від реалізації x виробів виду A і y виробів виду B складе $F = 30x + 40y$.

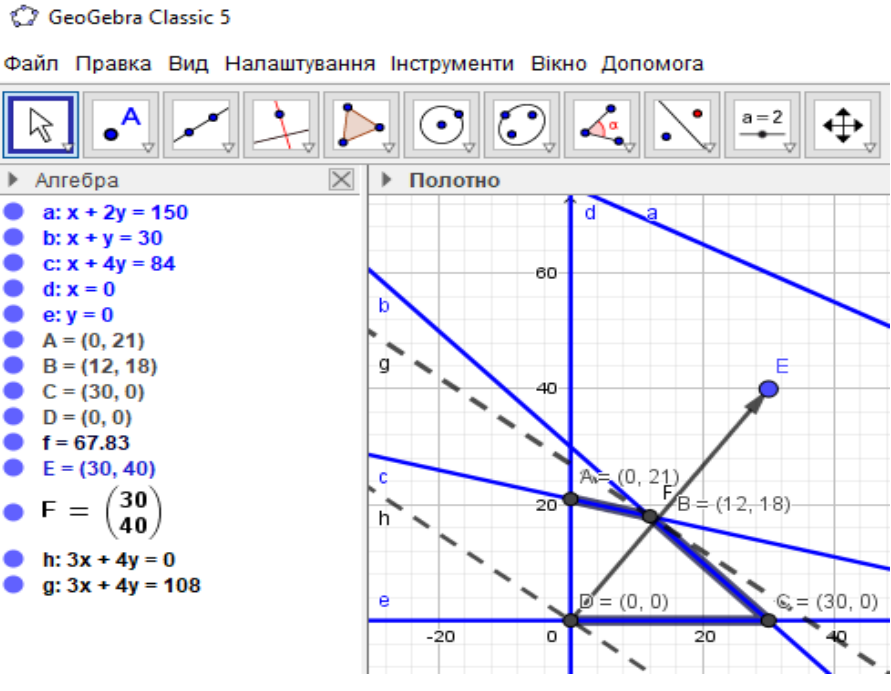
Таким чином, ми одержали наступну математичну задачу. Серед всіх позитивних рішень даної системи лінійних нерівностей необхідно визначити такі, при яких функція F приймає максимальне значення.

Знайдемо розв'язок сформульованої задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник рішень за допомогою Geogebra.

Таблиця 3.10.

Візуалізація побудови	Алгоритм побудови
1 	2 Побудуємо відповідні прямі: $12x + 4y = 300$ $4x + 4y = 120$ $3x + 12y = 252$ $x = 0$ $y = 0$.
	Визначаємо шукані півплощини

1	2
	Многокутник рішень - п'ятикутник OABCD.
	Побудуємо вектор C = (30;40)
	Будуємо пряму $30x + 40y = h$, перпендикулярну до вектра.

1	2
	Переміщаємо побудовану пряму $30x + 40y = h$ у напрямі вектора C

Методичний коментар.

В нерівностях системи обмежень за умовою позитивності змінних знаки нерівностей перепишемо на знаки точної рівності і побудуємо відповідні прямі:

$$12x + 4y = 300$$

$$4x + 4y = 120$$

$$3x + 12y = 252$$

$$x = 0$$

$$y = 0.$$

Будь-яка з прямих системи розділяє площину на дві напівплощини. Координати точок однієї напівплощини справджуються для первинної нерівності, а інший - ні. Для відшукування потрібної напівплощини, необхідно визначити чи координати будь-якої точки, що лежить на одній з напівплощин, задовольняють дану нерівність.

Визначимо, наприклад, напівплощину, яка визначена нерівністю $12x + 4y < 300$, для цього виберемо будь-яку точку, що лежить на одній з напівплощин, наприклад, початок координат - точку $(0;0)$. Оскільки, координати цієї точки задовольняють справджуються для нерівності $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0$

< 300 ; що свідчить, що напівплощина, якій належить точка $(0;0)$, визначається нерівністю $12x+4y \leq 300$. Це і показано відповідним кольором.

Перетин необхідних напівплощин створює багатокутник рішень даної задачі.

Многокутником рішень є п'ятикутник OABCD. Координати кожної точки цього п'ятикутника, справджуються для даної системи нерівностей і умові позитивності змінних. Отже, поставлену задачу вирішимо, якщо визначимо точку, яка належить п'ятикутнику OABCD, в якій функція F набуває найбільшого значення.

Для цього, будуюмо вектор $C = (30;40)$ і пряму $30x + 40y = h$, де h - деяка постійна, при якій пряма $30x + 40y = h$ має загальні точки з багатокутником рішень.

Переміщаючи побудовану пряму $30x + 40y = h$ у напрямі вектора C , бачимо, що останньою загальною точкою її з багатокутником рішень задачі служить точка В. Координати цієї точки і визначають план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки В як точки перетину прямих $4x + 4y = 120$ і $3x + 12y = 252$. Отже, її координати задовольняють рівнянням цих прямих

$$\begin{cases} 4x + 4y = 120; \\ 3x + 12y = 252 \end{cases}$$

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо $x'=12$, $y'=18$. Отже, якщо підприємство виготовить 12 виробів виду А і 18 виробів виду В, то воно отримає максимальний прибуток, $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ грн.

V. Підсумок заняття

Загальна схема знаходження розв'язку задач економічного змісту графічним методом:

1. Побудуємо прямі, рівняння котрих одержимо заміною в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Означуємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Відшукаємо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Побудуємо вектор, котрий показує напрямок зростання значення цільової функції.

5. Побудуємо пряму, перпендикулярну до вектра.

6. Переміщаючи пряму в напрямку вектра (для задачі на знаходження максимуму) або в протилежному напрямку (для задачі на знаходження мінімуму), відшукаємо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція приймає свого екстремального значення.

7. Встановлюємо координати точки, де функція приймає свого максимального чи мінімального значення і обраховуємо значення даної функції в цій точці.

VI. Домашнє завдання

Знайти розв'язки задач економічного змісту, поданих вчителем.