МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

НАЗАРУК АННА БОРИСІВНА

РЯДИ ФУР'Є ЗА ОРТОГОНАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

ХАРКЕВИЧ ЮРІЙ ІЛІОДОРОВИЧ

кандидат фіз.-мат. наук, професор

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № ________

Засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від __________2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Гембарська С. Б. ______

Луцьк – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми: Сучасний розвиток прикладної математики, чисельних методів та комп'ютерних технологій обумовлено зростанням інтересу до ефективних засобів наближення функцій. Одним із найбільш універсальних та продуктивних інструментів є ряди Фур'є за ортогональними системами многочленів. Їх застосування дозволяє розв'язувати задачі математичної фізики, оптимізації, чисельного аналізу та інженерного моделювання, забезпечуючи високу точність апроксимації функцій і швидку збіжність розкладів. Актуальність теми дослідження зумовлена розкладами за ортогональними многочленами часто виявляються ефективнішими за класичні тригонометричні ряди, особливо у випадках роботи з функціями на скінченних інтервалах або у задачах зі складними граничними умовами.

Наукове та практичне значення: Наукове значення роботи полягає у систематизації знань про властивості рядів Фур'є за ортогональними многочленами, їх точність, збіжність та чисельні алгоритми для обчислення коефіцієнтів. Практичне значення дослідження визначається широким спектром прикладних задач, де цей апарат використовується: від аналізу фізичних процесів до обчислювальної математики та моделювання технічних систем. Результати дослідження можуть бути застосовані у наукових розробках, інженерних розрахунках та освітньому процесі.

Аналіз наукових літературних джерел: У науковій літературі питання, пов'язані з використанням ортогональних систем для наближення функцій, досліджувалися багатьма вітчизняними та зарубіжними науковцями. Значний внесок у розвиток теорії зробили класичні праці, присвячені многочленам Лежандра, Чебишова, Ерміта та Лагерра. Українські та європейські дослідники приділяли увагу як теоретичним аспектам збіжності й точності рядів, так і прикладним питанням застосування в задачах математичної фізики, зокрема для розв'язання рівнянь теплопровідності та хвильових рівнянь. Аналіз літератури свідчить про сталість наукового інтересу до проблематики та наявність широкого поля для подальших досліджень.

Мета та завдання дослідження: Метою магістерської роботи є поглиблене дослідження властивостей рядів Фур'є за ортогональними многочленами, аналіз їх збіжності, точності та можливостей прикладного застосування. Для досягнення мети були поставлені такі завдання: дослідити математичні основи розкладу функцій у ряди за ортогональними многочленами; здійснити порівняння різних систем ортогональних многочленів за критеріями збіжності та ефективності; розглянути чисельні методи для знаходження коефіцієнтів розкладу; проаналізувати прикладне застосування у задачах математичної фізики; побудувати графічні ілюстрації для підтвердження теоретичних результатів.

Методи дослідження: У роботі використано методи математичного аналізу, теорії наближення функцій, теорії ортогональних многочленів, а також чисельні алгоритми, зокрема методи квадратур та метод найменших квадратів. Для перевірки результатів застосовувалися графічні методи та комп'ютерне моделювання.

Об'єкт та предмет дослідження: Об'єктом дослідження є ряди Фур'є за ортогональними многочленами як математичний апарат для розкладу функцій. Предметом дослідження є методи побудови таких розкладів, їх точність, збіжність та прикладне застосування у задачах математичної фізики.

Публікації та апробація результатів: Основні результати дослідження, викладені у роботі, були апробовані у процесі навчальної діяльності та наукових обговорень у рамках семінарів з математичного аналізу та чисельних методів. Окремі положення теми відображено у навчальних проектах та індивідуальних дослідженнях. Наявність відповідної наукової літератури підтверджує актуальність і практичну значущість отриманих результатів.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ТА РЯДІВ ФУР'Є

1.1 Поняття рядів Фур'є та умови збіжності

Ряди Фур'є за ортогональними многочленами представляють собою узагальнення класичного поняття рядів Фур'є, де як заміна системи тригонометричних функцій у ролі базису виступає система многочленів, ортогональних на певному відрізку відносно заданої вагової функції. Подібний підхід дає змогу розкладати в ряди не лише періодичні функції, а й неперіодичні функції, які визначені на кінцевих або нескінченних інтервалах, це робить цю теорію надзвичайно гнучким інструментом аналізу.

Початковою точкою є поняття ортогональної системи многочленів. Розглядаючи інтервал $[a,b]$ та функцію ваги $w(x)>0$ на цьому інтервалі, що є інтегровною та невід'ємною майже всюди. Система многочленів $\{P_n(x)\}\frac{\infty}{n}=0$ мають назву ортогональної відносної ваги $w(x)$, якщо для будь-яких двох різних індексів $m \neq n$ виконується умова:

$$\int_a^b P_m(x)w(x)dx = 0 \tag{1.1}$$

При цьому кожен многочлен має одиничну норму в сенсі скалярного добутку:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \tag{1.2}$$

Тобто,

$$\int_a^b P_n^2(x)w(x)dx = 1. \tag{1.3}$$

То така система називається ортонормованою. Дана система відіграє роль базису в гільбертовому просторі $L_w^2([a,b])$, буде складатись з усіх функцій, для яких інтеграл $\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx$ є скінченним. Саме в цьому просторі можливе розкладання довільної квадратно-інтегровної функції за даною системою многочленів.

Аналогічно до тригонометричного випадку, розклад функції $f(x)$ у ряд Фур'є за ортогональними многочленами має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{1.4}$$

де коефіцієнти c_n будуть обчислюватися за допомогою скалярного добутку:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) P_n(x) w(x) dx}{\int_a^b P_n^2(x) w(x) dx}, \tag{1.5}$$

У такому випадку ортонормованої системи знаменник буде дорівнювати одиниці, і формула спроститься до:

$$c_n = \int_a^b f(x) P_n(x) w(x) dx, \tag{1.6}$$

Такі коефіцієнти характеризують проєкцію функції на відповідний базисний многочлен, а часткова сума ряду:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x), \tag{1.7}$$

є найкращим у сенсі середньоквадратичної похибки апроксимантом функції f серед усіх многочленів степеня не вище N. [1, с. 6 – 21.]

Ортогональні многочлени мають багато конкретних прикладів, вони часто використовуються в прикладному аналізі. Наприклад многочлени Лежандра $P_n(x)$ ортогональні на відрізку $[-1;1]$ при вазі $w(x)\equiv 1$, многочлени Чебишева першого роду $T_n(x)$ – на тому ж відрізку, але з вагою $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, многочлени Лагерра $L_n(x)$ортогональні на $[0;\infty)$ з вагою $w(x)=e^{-x}$, а многочлени Ерміта $H_n(x)$ – на $(-\infty;\infty)$ з вагою $w(x)=e^{-x}$. Вибір системи буде визначатись природою задачі та областю визначення функції.

Збіжність рядів Фур'є за ортогональними многочленами можна розглядати у кількох сенсах. Найзагальніша гарантія існує у просторі L_w^2 : якщо f належить цьому простору, то її ряд Фур'є за ортонормованими многочленами буде збігатися до f у середньоквадратичному сенсі. Це є наслідком загальної теореми яка говорить про ортонормальні базиси у гільбертових просторах: часткові суми S_N є ортопроекціями на підпростір многочленів степеня не вище N, і при зростанні N похибка у нормі L_w^2 прямує до нуля.

Покомпонентна збіжність, тобто збіжність значень ряду до значень функції в кожній точці, буде вимагати додаткових умов. Так для многочленів Лежандра або Чебишева відомі теореми, які стверджують, що якщо функція неперервна на $[a,b]$ і має похідну, що належить L_w^2, то ряд Фур'є збігається до f рівномірно на всьому інтервалі. Якщо ж функція буде мати розриви першого роду, то, аналогічно до тригонометричного випадку, ряд буде збігатись в точці розриву до середнього значення односторонніх границь.

Рівномірна збіжність для більшості випадків пов'язана зі швидкістю спадання коефіцієнтів c_n. Чим гладша функція, тим швидше будуть спадати коефіцієнти. Як приклад, для розкладу за многочленами Лежандра, якщо функція

f має r неперервних похідних на $[-1;1]$, то коефіцієнти c_n спадають приблизно як $n^{-(r+1)}$, це дає змогу встановлювати умови абсолютної та рівномірної збіжності.

Важливою особливістю рядів Фур'є за ортогональними многочленами буде те, що вони природно пов'язані з розв'язками диференціальних рівнянь. Кожен клас ортогональних многочленів є власними функціями певного диференціального оператора, і розкладання в такий ряд еквівалентне спектральному розкладу задачі Штурма–Ліувілля. Це означає, що ці ряди будуть особливо зручні для розв'язання крайових задач математичної фізики, коли власні функції є саме ортогональними многочленами. [2, с. 7 – 9.]

Іншим аспектом є узагальнені теореми типу Парсеваля. Для ортонормованої системи многочленів Лежандра, наприклад, виконується рівність:

$$\int_{-1}^{1} \left| f(x) \right|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n \right|^2, \tag{1.8}$$

Тим часом для неортонормованих систем у правій частині додається множник, який дорівнює квадрату норми відповідного многочлена. Ці співвідношення дають змогу оцінити суму квадратів коефіцієнтів і робити висновки про швидкість їхнього спадання. [2, с. 9 – 11.]

Ряди Фур'є за ортогональними многочленами являється потужним узагальненням класичних тригонометричних рядів, саме це дозволяє розкладати функції в базисі, який найкраще підходить до задачі, враховує геометрію області та властивості функції, а також дає зручні інструменти для аналізу збіжності, апроксимації та розв'язання диференціальних рівнянь. Їхня теорія поєднує в собі ідеї ортогональності, спектрального аналізу та апроксимаційної теорії, що робить її фундаментальною частиною сучасного математичного аналізу.

1.2 Властивості та особливості ортогональних систем у просторах функцій

Ортогональні системи функцій у просторах з певним скалярним добутком відіграють ключову роль у побудові рядів Фур'є за ортогональними многочленами. Під ортогональною системою розуміють певну сукупність функцій, кожна пара різних елементів якої є ортогональною за визначенням скалярного добутку. Для рядів Фур'є цей скалярний добуток задається інтегралом, в якому враховується вагова функція. Якщо позначити дві функції $f(x)$ та $g(x)$, визначені на відрізку $[a,b]$, а вагову функцію – як $w(x)$, то скалярний добуток має вигляд:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \tag{1.9}$$

Ортогональність означає, що для двох різних функцій $\varphi_m(x)$ та $\varphi_n(x)$ виконується рівність [3]

$$\langle \varphi_m,\varphi_n\rangle = 0 \tag{1.10}$$

Якщо додатково кожна функція має одиничну норму, тобто

$$\langle \varphi_m,\varphi_n\rangle = 1, \tag{1.11}$$

то така система називається ортонормованою.

Одна з основних властивостей ортогональних систем це здатність утворювати базис у відповідному функціональному просторі. Це означає, що будь-яку функцію, яка належить до цього простору і задовольняє всі його необхідні умови інтегровності, можна подати у вигляді нескінченного ряду за елементами ортогональної системи. Для рядів Фур'є за ортогональними многочленами такою базисною системою виступають многочлени певного типу – наприклад, многочлени Лежандра, Чебишева, Лагерра чи Ерміта, кожен з яких визначений на своєму інтервалі та має власну вагову функцію.

Важлива особливість ортогональних систем це їхня стійкість відносно лінійних перетворень у межах простору, тобто будь-яка лінійна комбінація скінченної кількості елементів системи буде також належати простору і використовуватиметься для апроксимації функцій. Завдяки цьому часткові суми ряду Фур'є за ортогональними многочленами наближають функцію з певною точністю, яка залежить від кількості членів ряду та властивостей самої функції.[4]

Не менш важливою властивістю є мінімальність середньоквадратичної похибки. З усіх можливих наближень функції у вигляді лінійної комбінації скінченної кількості елементів ортогональної системи саме часткова сума ряду Фур'є дає найменше середнє квадратичне відхилення від оригінальної функції на заданому інтервалі. Це безпосередньо пов'язано з ортогональністю системи і є ключовою перевагою методу розкладу у ряди Фур'є.

Особливості ортогональних систем у просторах функцій будуть тісно пов'язані з вибором вагової функції, оскільки вона визначає, як буде вимірюваться "відстань" між функціями. Для многочленів Лежандра вагова функція дорівнює одиниці, для многочленів Чебишева першого роду вона має вигляд $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, для многочленів Лагерра – $w(x)=e^{-x}$,а для многочленів Ерміта – $w(x)=e^{-x^2}$. Правильний вибір ваги забезпечить коректну ортогональність та можливість відновлення функцій через ряд Фур'є за даною системою. [5]

Для прикладу розглянемо функції рядів Фур'є за многочленами Лежандра.

Розглянемо інтервал $[-1,1]$ та систему многочленів Лежандра $P_n(x)$, які задовольняють умову ортогональності

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{2n+1}, & \frac{m=n}{m\neq n}, \\ 0 & \end{cases} \tag{1.12}$$

Вагова функція для цієї системи дорівнює $w(x)=1$. Це означає, що скалярний добуток у просторі $L^2([-1;1])$ визначається як:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx, \tag{1.13}$$

Нехай маємо функцію

$$f(x)=x^2, \tag{1.14}$$

Мета – розкласти її у ряд Фур'є за многочленами Лежандра:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x), \tag{1.15}$$

де коефіцієнти визначаються формулою

$$a_n=\frac{\langle f,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle}=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx}{\dfrac{2}{2n+1}}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx. \tag{1.16}$$

Для обчислення розглянемо перші три члени ряду.

(1) Коефіцієнт a_0: Многочлен Лежандра нульового степеня:

$$P_0(x)=1.$$

$$a_0=\frac{2\cdot 0+1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot 1dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}. \tag{1.17}$$

(2) Коефіцієнт a_1:

$$P_1(x)=x. \tag{1.18}$$

$$a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot xdx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3dx \tag{1.19}$$

Оскільки x^3 є непарною функцією, інтеграл на симетричному інтервалі дорівнює нулю $a_1 = 0$:

(3) Коефіцієнт a_2:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right). \tag{1.20}$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\left(3x^4 - x^2\right)dx \tag{1.21}$$

Обчислимо інтеграли окремо:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right] = \frac{2}{5}, \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}. \tag{1.22}$$

Підставимо:

$$a_2 = \frac{5}{4}\left(3 \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{18 - 10}{15} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{3} \tag{1.23}$$

Отже, частковий розклад має вигляд:

$$x^2 \approx \frac{1}{3}P_0(x) + 0 \cdot P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x). \tag{1.24}$$

З огляду на те, що многочлени Лежандра утворюють повну систему, цей розклад є точним для квадратичної функції:

$$x^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) = x^2. \tag{1.25}$$

Цей приклад демонструє, що для многочленів низького степеня розклад у ряд Лежандра є скінченним.

РОЗДІЛ 2. РОЗКЛАДИ ФУНКЦІЙ У РЯДИ ФУР'Є ЗА ОРТОГОНАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

2.1 Методики побудови рядів Фур'є за ортогональними многочленами

Методика побудови рядів Фур'є за ортогональними многочленами буде ґрунтуватися на використанні властивостей ортогональності вибраної системи поліномів у певному функціональному просторі з фіксованою ваговою функцією. Ідея полягає у тому, що будь-яку функцію, яка буде задовольняти певні умови гладкості та інтегровності на визначеному інтервалі, можна апроксимувати у вигляді нескінченної суми добутків коефіцієнтів та елементів обраної ортогональної системи. Подібний підхід є узагальненням класичних тригонометричних рядів Фур'є, але замість синусів та косинусів будуть використовуватись система ортогональних многочленів, вона підбирається залежно від природи задачі та властивостей вагової функції.

Першим кроком для побудови ряду Фур'є є вибір конкретної системи ортогональних многочленів. Наприклад, якщо розглядається інтервал $\left[-1;1\right]$ з рівномірною вагою $w\left(x\right)=1,$ то природно застосовувати многочлени Лежандра. Якщо вага має вигляд $w\left(x\right)=e^{-x^2}$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то буде зручно використовувати многочлени Ерміта. Для випадку в якому вага $w\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ на $\left[-1;1\right]$ підходять многочлени Чебишова першого роду. Вибір системи зумовлюється як властивостями задачі, так і бажаними аналітичними перевагами при інтегруванні та обчисленні коефіцієнтів. [6]

Далі виконується визначення коефіцієнтів розкладу. Так функція $f\left(x\right)$ буде належати простору $L_w^2\left(a,b\right)$, тобто вона є квадратно-інтегровною з вагою $w\left(x\right)$ на відрізку $\left[a,b\right]$. Якщо $\left\{P_n\left(x\right)\right\}$ – ортонормована система многочленів у цьому просторі, то ряд Фур'є за цією системою має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x), \tag{2.1}$$

де коефіцієнти c_n визначаються формулою

$$c_n=\int_a^b f(x)P_n(x)w(x)dx, \tag{2.2}$$

У разі, якщо система лише ортогональна, але не ортонормована, коефіцієнти мають вигляд

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)P_n(x)w(x)dx}{\int_a^b\left[P_n(x)\right]^2 w(x)dx}. \tag{2.3}$$

Цей етап є ключовим, адже від правильності обчислення коефіцієнтів залежить точність апроксимації.

Наступним кроком є формування часткових сум ряду

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}c_nP_n(x), \tag{2.4}$$

вони використовуються для наближення функції $f(x)$. Залежно від властивостей функції та системи многочленів, збіжність ряду може бути рівномірною, майже всюди чи у середньоквадратичному сенсі. [7]

Одна з важливих особливостей методики є врахування вагової функції при інтегруванні. Ця особливість робить метод більш гнучким, ніж класичний тригонометричний ряд Фур'є, оскільки за допомогою нього можна підібрати систему, максимально адаптовану до поведінки функції на заданому інтервалі. Крім того, у практичних обчисленнях часто застосовуються рекурентні співвідношення для обраних многочленів, що значно спрощує знаходження часткових сум без необхідності прямого інтегрування кожного члена.

У чисельній реалізації методу часто використовують квадратурні формули, сумісні з обраною системою ортогональних многочленів (наприклад, формули

Гаусса для многочленів Лежандра, Ерміта, Лагерра чи Чебишова). Це дозволяє значно підвищити точність та швидкість обчислень.

Існує декілька методичних підходів до побудови рядів Фур'є за ортогональними многочленами, які запропоновані різними дослідниками у межах класичного та узагальненого аналізу Фур'є як наприклад.

Розробки математика С. М. Нікольського (Додаток А) у сфері ортогональних рядів що ґрунтувалися на узагальненні класичної теорії Фур'є на випадок ортогональних многочленів, зокрема многочленів Лежандра та Чебишева. У підході ключовим є введення вагової функції, вона враховує геометричні або фізичні особливості області визначення функції. Побудова ряду передбачає собою спочатку формування ортонормованої системи многочленів з використанням нормування за ваговою функцією $w(x)$. Після цього функція буде розкладатися у вигляді нескінченної суми, де коефіцієнти визначаються інтегральними формулами проєкцій. Методика Нікольського має перевагу в тому, що дозволяє отримувати збіжні ряди навіть для функцій, які не будуть періодичними, а також добре поводиться на обмежених відрізках. [8]

О. М. Стеклов розробив власний підхід до рядів Фур'є за ортогональними многочленами в контексті розв'язання крайових задач математичної фізики. У його методиці побудова ряду починається з підбору многочленів, які є власними функціями певного диференціального оператора. Коефіцієнти розкладу визначаються через скалярний добуток у просторі L^2 з ваговою функцією, що випливає з фізичної постановки задачі. Особливість цього підходу – тісний зв'язок між вибором ортогональної системи та специфікою диференціального рівняння, яке описує процес чи явище. [9]

2.2 Використання многочленів Лежандра та Чебишова у розкладі функцій

Многочлени Лежандра та Чебишова (Додаток Б) одні з найпоширеніших систем ортогональних многочленів, вони широко застосовуються в задачах наближення функцій, обчислювальної математики, математичної фізики та чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь. Їх використання у побудові рядів Фур'є буде зумовлене особливими властивостями ортогональності, вони дозволяють ефективно розкладати функції, визначені на певних інтервалах, із заданою ваговою функцією. [10]

Многочлени Лежандра виникають як розв'язки диференціального рівняння Лежандра

$$\left(1-x^2\right)y^n-2xy^1+n\left(n+1\right)y=0, \tag{2.5}$$

де n – ціле невід'ємне число. Вони визначаються на відрізку $\left[-1;1\right]$ та є ортогональними відносно вагової функції $w\left(x\right)=1$, тобто умова ортогональності має вигляд:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2\left(x\right)dx=\frac{2}{2n+1}, \tag{2.6}$$

Для розкладу функції $f\left(x\right)$ у ряд Фур'є за многочленами Лежандра використовують формулу:

$$f\left(x\right)\approx\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n\left(x\right), \tag{2.7}$$

де коефіцієнти визначаються:

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_n\left(x\right)dx. \tag{2.8}$$

Завдяки простій ваговій функції такі ряди зручні при апроксимації функцій на симетричному інтервалі, особливо в задачах фізики, де часто виникає сферична симетрія (наприклад, розв'язання рівняння Лапласа у сферичних координатах). [11]

Многочлени Чебишова першого роду $T_n(x)$ також визначаються на інтервалі $[-1;1]$, але є ортогональними відносно вагової функції $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Їх можна подати у вигляді:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), \tag{2.9}$$

Умова ортогональності набуває вигляду:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\end{cases} \tag{2.10}$$

Розклад функції у ряд Фур'є–Чебишова має вигляд:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \ n\geq 1, \tag{2.11}$$

а для $n=0$ використовується множник $\frac{1}{\pi}$ замість $\frac{2}{\pi}$.

Перевагою многочленів Чебишова буде полягати в тому, що вони мінімізують похибку апроксимації за максимальним відхиленням (у сенсі теореми Чебишова), це робить їх особливо корисними в інтерполяції та чисельному інтегруванні.

Використання цих двох типів многочленів у побудові рядів Фур'є дозволяє враховувати специфіку задачі. Важливою є рівномірність ваги по інтервалу, застосовують многочлени Лежандра. Якщо функція має особливу поведінку біля кінців інтервалу або потрібно мінімізувати максимальну похибку, перевагу надають многочленам Чебишова. [12]

Приклад затосування методу многочленів Лежандра:

Приклад 1 – застосування многочленів Лежандра: розв’язок задачі Лапласа всередині кулі з заданою граничною функцією на поверхні Потрібно знайти гармонічну функцію $u(r,\theta)$ у кулі радіуса R (сферична симетрія з незалежністю від азимутального кута φ, яка задовольняє рівняння Лапласа в сферичних координатах та задовольняє граничну умову на поверхні сфери:

$$\Delta u = 0,\ \ 0 \le r < R, \tag{2.12}$$

$$u(R,\theta) = g(\theta),\ \ \theta \in [0,\pi], \tag{2.13}$$

де $g(\theta)$ – задана (довільна) функція кута полярного відхилення. Через незалежність від φ задача редукується до одновимірної по куту.

Розв’язок шукаємо методом відділення змінних. Загальний вигляд регулярного при $r = 0$ розв’язку, який містить лише ступені r^n, має вигляд

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{2.14}$$

де P_n – многочлен Лежандра степеня n (залежність від $\cos\theta$ – стандартна). Умову на поверхні $r = R$ рівняння переписуємо як

$$g(\theta) = u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta), \tag{2.15}$$

Отже $g(\theta)$ розкладається в ряд Лежандра по змінній $x = \cos\theta$ на відрізку $[-1;1]$:

$$g(\theta) = G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),\ x = \cos\theta, \tag{2.16}$$

і зв’язок коефіцієнтів c_n та A_n простий: $c_n = A_n R^n$. Тому, щоб знайти $u(r,\theta)$, достатньо знайти коефіцієнти розкладу $G(x)$ за P_n, а потім підставити $A_n = c_n R^n$.

Коефіцієнти розраховуються за ортогональністю Лежандра:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} G(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{2.17}$$

де в останньому переході зроблено заміну $x=\cos\theta,\ dx=-\sin\theta d\theta.$ Тоді розв'язок в кулі записується явно: [13]

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n c_n P_n(\cos\theta),\ \ c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} g(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{2.18}$$

Пояснення чому це працює і питання збіжності. Ортогональність P_n гарантує, що розклад $G(x)$ збігається до G у сенсі $L^2([-1;1])$ за стандартною мірою; якщо $g(\theta)$ неперервна (і, наприклад, має пару похідних), то збіжність буде покомпонентною або навіть рівномірною в залежності від гладкості. Фактор $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ додатково забезпечує, суму в області $r<R$ є абсолютно збіжною (оскільки $\left|\frac{r}{R}\right|<1$), тому для внутрішніх точок кулі розв'язок заданий рівномірно та аналітично. Це робить метод Лежандра ідеальним для внутрішніх задач із сферичною симетрією: розклад на сфері дає спектральні коефіцієнти, а модуляція $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ забезпечує гарну збіжність всередині. [14]

Практичні зауваги для обчислення. У реаліях розрахунки коефіцієнтів виконуються чисельно: інтеграл для c_n обчислюється за допомогою квадратур, найкраще — гаусових квадратур на відрізку $[-1;1]$ (Гаусс–Лежандр), бо вони точні для поліноміальних підінтегральних множників високих степенів і мінімізують число вузлів. Якщо гранична функція задана як табличні дані $g(\theta_i)$, зручніше використовувати дискретні проєкції (метод Гаусса або метод спектральних коефіцієнтів через дискретне косинусне перетворення при заміні

$x = \cos\theta$). Також для швидкого обчислення значення часткових сум вигідно застосовувати рекурентні співвідношення для P_n та стабільний алгоритм оцінювання (наприклад, Clenshaw-алгоритм).

Як підсумок многочлени Лежандра дають природний спектр для задач із сферичною геометрією. Розклад граничної функції у ряд Лежандра дає ефективний спосіб знайти гармонічний розв’язок у сфері, з явними формулами для коефіцієнтів і хорошими властивостями збіжності всередині кулі. [15]

Приклад 2 – застосування многочленів Чебишева: спектральна апроксимація і інтерполяція з мінімальною похибкою (спектральний метод для ОДУ + інтерполяція на вузлах Чебишева). Розглянемо задачу апроксимації гладкої функції $f(x)$ на відрізку $[-1;1]$ і подальше використання цієї апроксимації для чисельного розв’язання звичайного диференціального рівняння із краєвими умовами. Многочлени Чебишева $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ з вагою $w(x) = (1 - x^2)^2$ мають властивість, що їхні вузли екстремумів і нулів мінімізують полігональну нестабільність інтерполяції (усувають величезні осциляції біля кінців інтервалу) — тому вузли Чебишева широко використовуються для інтерполяції та квадратур.

Постановка задачі прикладу: нехай треба знайти чисельно розв’язок краєвої задачі

$$-u^{n}(x) + g(x)u(x) = f(x),\ \ x \in [-1,1],\ u(-1) = a,\ u(1) = \beta \qquad (2.19)$$

Спектральний метод із базисом Чебишева полягає в наступному: шукаємо апроксимацію у вигляді скінченного розкладу

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x). \qquad (2.20)$$

Задача зводиться до визначення коефіцієнтів a_n, які задовольняють апроксимоване рівняння у дискретних точках (колокаційний підхід) або в слабому сенсі (галеркінівський підхід). Розглянемо тут колокаційний метод на вузлах Ґаусса–Лобатто для Чебишева:

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right),\ j = 0,\dots N. \tag{2.21}$$

На цих вузлах інтерполяційний поліном має гарну стабільність. Колокаційний підхід: накладаємо умову, що u_N задовольняє диференціальне рівняння у вузлах x_j для , $j = 1,\dots N-1 j = 1$, а на краях $j = 0, Nj$ накладаємо краєві умови. Для цього потрібні відображення похідних $u_N^1(x), u_N^n(x)$ у вигляді лінійних комбінацій коефіцієнтів a_n. Існують аналітичні формули для похідних T_n (або їх можна обчислювати через спектральні диференціальні матриці D, D2, які дають значення похідних полінома в вузлах вектор-матричним множенням):

$$u_N^n\left(x_j\right) \approx \sum_{k=0}^{N} D_{jk}^{(2)} u_N\left(x_k\right), \tag{2.22}$$

де матриця $D^{(2)}$ – спектральна матриця другої похідної для вузлів Чебишева. Тоді колокаційна система набуватиме матричного вигляду для невідомого вектору значень $u_N\left(x_k\right)$ у вузлах, або для коефіцієнтів a_n, залежно від реалізації.

Практичні кроки (алгоритм реалізації колокаційного спектрального методу):

1. Вибрати *N* та обчислити вузли $x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)$.
2. Створити спектральну матрицю другої похідної $D^{(2)}$ для цих вузлів (є стандартні явні формули для елементів матриці, що залежать від x_j і ваг).
3. Сформувати дискретну систему

$$-\left(D^{(2)} u\right)_j + q\left(x_j\right) u_j = f\left(x_j\right),\ j = 1,\dots,N-1, \tag{2.23}$$

додати дві рівності для країв $u_0 = \alpha, u_N = \beta.$ Розв'язати отриману скінченновимірну лінійну систему для вектора $u = (u_0, \ldots u_N)^T$. Якщо потрібно коефіцієнти a_n, виконати перетворення (дискретний косинусний перетворювач) від значень u_j у вузлах до коефіцієнтів a_n.

Чому вузли Чебишева і чому це добре. Вузли $x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)$ будуть рівномірно розподілені по куту, але не по x: вони щільніші поблизу країв $[-1,1]$ саме там де інтерполяційні поліноми звичайно найбільш хитливі. Такий розклад вузлів мінімізує максимальну помилку інтерполяції та забезпечує ближчу до оптимальної апроксимацію у нормі L^∞. Крім цього, перетворення значень у коефіцієнти a_n та навпаки ефективно реалізується через дискретне косинусне перетворення (DCT), що дає швидкість $O(N \log N)$.

Питання збіжності. Якщо u_x є гладким у деякій смузі навколо відрізка, коефіцієнти a_n спадатимуть експоненційно, і спектральна апроксимація забезпечить дуже швидке (спектральне) спадання похибки при зростанні N. Для функцій з кінцевою кількістю похідних спадання буде алгебраїчним із швидкістю, що залежатиме від порядку гладкості. Якщо функція матиме розриви або кутові особливості, буде з'являтися ефект Гіббса і спадання буде повільнішим; для таких випадків застосовують фільтрацію коефіцієнтів або локальні перетворення.

Для оцінювання поліномів і сум з коефіцієнтами зручно буде застосовувати Clenshaw-алгоритм який є стабільним для обчислення сум по рекурентній базі. Для обчислення похідних у вузлах застосовують аналітично виведені матриці диференціювання D матриці. Так при формуванні матриці для колокації слід враховувати масштаби і можливі загальні погіршення обумовленості – ще іноді краще працювати у вигляді коефіцієнтів a_n і використовувати галеркінівський підхід, що дає симетричну добре обумовлену матрицю.

2.3 Порівняння точності та збіжності ортогональних розкладів

Порівняння точності та збіжності ортогональних розкладів, зокрема рядів Фур'є за ортогональними многочленами, ґрунтується на розумінні того, що кожна з систем многочленів матиме свої аналітичні та обчислювальні переваги залежно від характеру апроксимованої функції, умов задачі та критеріїв оцінювання похибки. На вибір базису безпосередньо впливатиме швидкість збіжності часткових сум до оригінальної функції та на якість наближення у різних нормах – середньоквадратичній, рівномірній, енергетичній тощо. [16]

Для класичного випадку розклади за многочленами Лежандра будуються для інтервалу $\left[-1,1\right]$ з рівномірною ваговою функцією $w\left(x\right)=1$. Це означатиме, що у процесі апроксимації всі точки інтервалу мають однакове значення з точки зору внеску у середньоквадратичну похибку. Така рівномірність робить розклади за многочленами Лежандра особливо ефективними у випадках, коли функція гладка та не має особливостей на краях інтервалу. Вони будуть часто використовуваться в задачах фізики та інженерії, як приклад, розв'язання рівнянь Лапласа в сферичних координатах, де симетрія функції відносно центру області має важливе значення.

Многочлени Чебишова першого роду мають вагову функцію $w\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, яка надає більшу вагу значенням функції поблизу точок $x=\pm1$. Це вплине на розподіл вузлів у формулі Гаусса–Чебишова, концентруючи їх ближче до країв інтервалу. Така особливість забезпечує високу точність відтворення поведінки функції в областях, де вона швидко змінюється, або де наявні крайові ефекти. У рівномірній нормі розклади за многочленами Чебишова часто демонструють кращу збіжність, оскільки тісно пов'язані з поліномами найкращої рівномірної апроксимації, що мінімізують максимальну похибку. [17]

Щодо збіжності, для аналітичних функцій обидві системи забезпечують експоненційне спадання коефіцієнтів ряду. Проте швидкість цього спаду, яка визначається коефіцієнтом експоненти, залежить від відстані до найближчої особливості функції в комплексній площині та може відрізнятися для різних ортогональних систем. Для функцій з кінцевою гладкістю коефіцієнти спадають за степеневим законом, і тут вже вплив вибору базису стає більш помітним. Наприклад, для функцій з розривами похідних багато в чому вигіднішими будуть многочлени Чебишова, оскільки вони здатні краще контролювати амплітуду коливань, викликаних явищем Гіббса. [18]

Додатковий фактор це стабільність чисельних обчислень. Так при практичному розрахунку коефіцієнтів ряду часто використовують формули Гаусса для інтегрування. У випадку многочленів Лежандра вузли розташовуються рівномірніше в центрі інтервалу, тоді як для многочленів Чебишова вузли знаходяться ближче до країв. Це впливатиме на точність інтегрування при відтворенні функцій з локальними особливостями.

Є також аспект оптимізації порядку апроксимації. У прикладних задачах не завжди потрібно досягати однакової точності у всіх точках інтервалу. Якщо важливо зменшити похибку у певній області, вибір вагової функції, притаманної конкретному базису, дозволяє "змістити" фокус апроксимації у потрібну зону. Це робить ортогональні многочлени гнучким інструментом, що дозволяє адаптувати розклад під специфіку задачі. [19]

Порівняння точності та збіжності не буде універсальним – кожен базис має свою “оптимальну” сферу застосування. Многочлени Лежандра ефективні для рівномірно важливих даних і задач з гладкими функціями, тоді як многочлени Чебишова вигідніші при наявності крайових особливостей або при вимозі рівномірної мінімаксної апроксимації. Для сучасної обчислювальної математики часто застосовуються комбіновані підходи, коли в залежності від ділянки інтервалу чи характеру функції використовуються різні ортогональні системи для досягнення найкращої сумарної точності. [20]

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ ФУР'Є

3.1 Побудова наближень функцій на основі ортогональних рядів

Побудова наближень функцій на основі ортогональних рядів являє собою один із найефективніших методів апроксимаційного аналізу, оскільки вона дозволяє замінювати складні або навіть неаналітичні функції простими поліноміальними або тригонометричними розкладами з контрольованою похибкою. Для випадку рядів Фур'є за ортогональними многочленами цей підхід особливо корисний, коли функція визначена на певному відрізку й має властивості, що узгоджуються з ваговою функцією, яка визначає ортогональність вибраної системи многочленів. [21]

Сутність методу полягає в тому, що функцію яку потрібно знайти $f(x)$, яка належить простору квадрат-інтегровних функцій з певною ваговою функцією $w(x)$, розкладають у ряд за ортогональними многочленами $\{P_n(x)\}$:

$$f(x) \approx S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x), \tag{3.1}$$

де коефіцієнти a_n обчислюються за формулою проєкції, яка випливає з властивості ортогональності:

$$a_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} = \frac{\int_a^b f(x) P_n(x) w(x) dx,}{\int_a^b [P_n(x)]^2 w(x) dx,} \tag{3.2}$$

Вибір конкретної системи ортогональних многочленів залежатиме від інтервалу та характеру функції. Якщо область визначення збігатиметься з відрізком $[-1;1]$ і нематиме особливих умов на вагову функцію, зручно використовувати многочлени Лежандра. Якщо ж важливо підсилити апроксимацію в околі країв інтервалу, доцільно обрати многочлени Чебишова, вагова функція яких сприяє зменшенню похибки на кінцях відрізка. У випадках, коли функція визначена на напівнескінченному або нескінченному проміжку, використовують многочлени Лагерра чи Ерміта відповідно. [22]

Процес побудови наближення починатиметься з вибору ступеня N ряду, він визначає кількість членів, що будуть враховані. Збільшення N зазвичай покращує точність наближення, однак надмірне збільшення призводить до небажаних ефектів, як-от феномен Гіббса у випадку функцій із розривами. Тому важливим етапом буде аналіз збіжності та визначення оптимального ступеня апроксимації для конкретного завдання.

Для обчислення коефіцієнтів можуть застосовуватись як аналітичні, так і чисельні методи. У практичних завданнях, коли інтеграли складно обчислити аналітично, використовують методи чисельного інтегрування, наприклад квадратурні формули, спеціально адаптовані до обраної системи многочленів. Такі методи, як правило, забезпечують високу точність обчислення коефіцієнтів навіть для функцій зі складною структурою. [23]

Особливої уваги потребує питання рівномірної та середньоквадратичної збіжності. Для простору $L_w^2(a,b)$ збіжність ряду Фур'є за ортогональними многочленами гарантована для будь-якої функції, що належить цьому простору. Проте, якщо буде потрібна рівномірна збіжність, додатково враховуватимуться властивості неперервності та гладкості функції. У багатьох прикладних задачах, таких як розв'язання диференціальних рівнянь, обробка сигналів або моделювання фізичних процесів, достатньо середньоквадратичної збіжності, оскільки вона забезпечить мінімальну похибку у середньому по всьому інтервалу. (Додаток Г) [24]

Приклад 1: Наближення за многочленами Лежандра: $f(x)=x^2$ на $[-1;1]$

Постановка. Шукаємо найкращу в сенсі $L^2([-1;1])$ з вагою $w(x)=1$ поліноміальну апроксимацію функції $f(x)=x^2$ у вигляді ряду Фур'є –Лежандра:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n(x),\ a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx. \tag{3.3}$$

Крок 1. Властивості базису. Перші поліноми Лежандра:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\ \int_{-1}^{1}P_mP_n dx=\frac{2}{2n+1}\delta mn. \tag{3.4}$$

Крок 2. Розклад x^2 у базисі $\{P_n\}$. Оскільки x^2 – парна функція, у розкладі будуть лише парні P_{2k}. Запишемо x^2 через P_0 та P_2. З означення P_2:

$$P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}\to x^2=\frac{1}{3}\left(2P_2(x)+P_0(x)\right). \tag{3.5}$$

Отже

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x). \tag{3.6}$$

Крок 3. Коефіцієнти (через формулу проєкції). Перевіримо формулою:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\ a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^2xdx=0, \tag{3.7}$$

(непарна інтегранта),

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{3x^2-1}{2}dx=\frac{5}{4}\left(3\int_{-1}^{1}x^4dx-\int_{-1}^{1}x^2dx\right)=\frac{5}{4}\left(3\cdot\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}, \tag{3.8}$$

І для всіх $n\geq 3$ інтеграли обнуляються. Отже розклад є скінченним:

$$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x). \tag{3.9}$$

Крок 4. Часткові суми і похибка. Вже при $N=2$ матиме точну рівність (похибки 0). Цей приклад ілюструє, як ортогональний базис “підхоплює” структуру функції: ступінь 2 функції збігається зі ступенем одного з базисних поліномів, тому розклад короткий і точний.

Зауваження щодо загального алгоритму (коли немає “щасливого” збігу).

1) Для довільної $f \in L^2([-1;1])$ обчислюємо ana_nan за формулою проєкції й беремо часткову суму $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n$.

2) Якщо потрібна рівномірна точність, аналізуємо гладкість f: що більше похідних має f, то швидше спадають a_n, і меншим потрібен N.

3) На практиці інтеграли беруть за квадратурами Гаусса–Лежандра, що дає високу точність для помірних N.

Побудовою наближень на основі ортогональних рядів дасть можливість ефективно представляти складні функції у вигляді простих і зручних для аналізу розкладів. Використання многочленів Лежандра, Чебишова, Лагерра чи Ерміта дозволятиме гнучко адаптувати метод до різних інтервалів і властивостей функцій, а коректний вибір кількості членів ряду та способу обчислення коефіцієнтів забезпечує оптимальний баланс між точністю та обчислювальними витратами.

3.2 Застосування чисельних алгоритмів для знаходження коефіцієнтів розкладу

Застосування чисельних алгоритмів для знаходження коефіцієнтів розкладу. Для практичних задач розкладу функцій у ряди Фур’є за ортогональними многочленами (зокрема Лежандра, Чебишова, Гегенбауера) часто неможливо отримати аналітичний вираз для коефіцієнтів інтеграла виду [25]

$$a_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)w(x)dx}{\int_{-1}^{1} \varphi_n^2(x)w(x)dx}. \tag{3.10}$$

де $\varphi_n(x)$ — ортогональні многочлени, $w(x)$ — вагова функція.

У таких випадках застосовуються чисельні алгоритми наближеного обчислення інтегралів. Найпоширеніші підходи:

Метод квадратур Гауса

1) Використовуватись будуть спеціально підібрані системи вузлів і ваг, що забезпечить точне обчислення інтегралів для поліномів до ступеня $2n-1$ включно.

2) Для многочленів Лежандра застосовують квадратури Гауса–Лежандра, для Чебишова — квадратури Гауса–Чебишова.

3) Приклад: для знаходження коефіцієнта a_n можна використати формулу

$$a_n \approx \frac{\sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k)\varphi_n(x_k)}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}, \tag{3.11}$$

де x_k — вузли, w_k — ваги квадратури.

Метод швидкого косинусного перетворення (DCT) [26]

1) Більш ефективний при роботі з многочленами Чебишова, завдяки їх зв'язку з косинусами через заміну $x = \cos\theta x$.

2) Обчислення коефіцієнтів буде зводитись до застосування швидкого перетворення Фур'є (FFT) зі складністю $O(N \log N)$.

Алгоритм Кленшоу [27]

1) Використовується для стабільного та ефективного обчислення значень ортогональних многочленів і сум часткових рядів.

2) Зменшує похибки, що накопичуються при прямому підрахунку через рекурентні співвідношення.

Метод найменших квадратів

1) При відомих значеннях функції в дискретних точках коефіцієнти визначають з мінімізації середньоквадратичної похибки:

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_N} \sum_{k=1}^{M} \left(f(x_k) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x_k) \right)^2. \tag{3.12}$$

2) Приводить до розв'язання системи лінійних рівнянь з матрицею Грама, що складається з скалярних добутків многочленів у вибраних точках.

Адаптивні алгоритми: [28]

1) Використовують змінну кількість членів ряду, збільшуючи її до досягнення заданої точності.

2) Особливо важливі при апроксимації функцій з локальними особливостями або розривами.

Застосування чисельних методів дає змогу:[29]

1) автоматизувати процес обчислення коефіцієнтів розкладу;

2) досягати високої точності при обмежених обчислювальних ресурсах;

3) ефективно працювати з функціями, для яких неможливо отримати інтеграли у закритій формі.

На практиці вибір методу залежить від типу базису, наявних значень функції (аналітичних чи дискретних) та вимог до точності. (Див. Додаток Д)

3.3 Прикладне застосування: розв'язання задач з математичної фізики

Розв'язання задач математичної фізики часто пов'язується з необхідністю аналізу процесів, вони описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних. До таких задач належатимуть теплопровідність, коливання мембран і струн, поширення хвиль, дифузія, потенційні поля тощо. Для багатьох з них важко або взагалі неможливо знайти точний розв'язок у вигляді елементарних функцій, але існує ефективний підхід через представлення розв'язків у вигляді рядів Фур'є за ортогональними многочленами. Такий метод базується на розкладі початкових або граничних умов за ортогональною системою функцій, яка утворюється з розв'язків відповідної задачі Штурма–Ліувілля. [30]

У випадку одномірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial u} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.13}$$

з граничними умовами Діріхле та заданим початковим розподілом температури, розв’язок можна представити у вигляді суми добутків часової та просторової частин. Просторова частина задачі приводитиме до власних функцій, що для певних граничних умов можуть бути описані многочленами Лежандра або Чебишова. Початковий розподіл температури розкладатиметься за цими ортогональними функціями, і кожен коефіцієнт ряду визначає інтенсивність внеску відповідної моди у загальний розв’язок. Такий підхід дозволяє аналітично отримати розв’язок, навіть якщо початкова функція є складною. [31]

Інший приклад – це задача коливання мембрани або струни. Рівняння коливань має вигляд:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u. \tag{3.14}$$

при розв’язанні таким методом розділення змінних просторові компоненти знову утворять систему ортогональних функцій. Область що матиме форму, де природною ортогональною системою виступають многочлени Лежандра або Чебишова, то розв’язок зручно будувати саме через ряди Фур’є за цими многочленами. Це значно полегшить врахування складних початкових форм збурення та дозволяє точно відслідковувати розвиток коливань у часі. [32]

Використання рядів Фур’є за ортогональними многочленами у математичній фізиці забезпечить високу точність наближення і можливість ефективного врахування граничних умов. Завдяки ортогональності базису обчислення коефіцієнтів розкладу значно спрощується, а чисельна реалізація методу дозволяє швидко отримувати наближення розв’язку для різних типів задач. Це робить метод одним із базових інструментів у прикладних розрахунках, особливо там, де інші підходи або надто складні, або дають менш точні результати.

Приклад 1. Рівняння Лапласа в кулі з осьовою симетрією (многочлени Лежандра)

Розглядаючи гармонічну функцію u, що задовольняє $\Delta u = 0$ всередині кулі радіуса R та матиме задані значення на поверхні $r = R : u(R,\theta) = g(\theta)$. Припускаємо осьову симетрію, тож у сферичних координатах залишаються змінні r і θ, а залежність по куту зручно виразити через $\mu = \cos\theta \in [-1,1]$. [33]

Метод розділення змінних приводитиме до базису власних кутових функцій — многочленів Лежандра $P_l(\mu)$. Загальний розв'язок усередині кулі має вигляд

$$u(r,0) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} P_l(\cos\theta), \tag{3.15}$$

де степенева залежність по r береться як така, що лишається скінченною при $r \to 0$. Щоб знайти коефіцієнти, проєктуємо граничні дані $g(\theta)$ на ортогональну систему $\{P_l(\cos\theta)\}$ з вагою 1 на $[-1,1]$:

$$g(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) \to A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} g(arc\cos\mu) P_l(\mu) d\mu. \tag{3.16}$$

Ортогональність $\int_{-1}^{1} P_l(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2l+1}{2} = \int_{-1}^{1} \delta_{lm}$ дає явну формулу для проєкції. Як тільки коефіцієнти A_l будуть обчислені (аналітично або чисельно), розв'язок у всій кулі отримуємо простою підстановкою.

Цей підхід особливо прозорий, коли $g(\theta)$ має просту кутову структуру. Наприклад, якщо $g(\theta) = \cos\theta$, то лише гармоніка $\ell = 1$ дає ненульову проєкцію, і розв'язок зводиться до одного члена: [34]

$$A_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \mu \cdot \mu d\mu = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1,\ u(r,0) = \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} \cos\theta. \tag{3.17}$$

Для складніших g коефіцієнти зручно обчислювати квадратурами Гаусса–Лежандра, це узгоджено з ортогональністю базису і дає високу точність при невеликій кількості вузлів. Перевага подібного прикладу — “природність” многочленів Лежандра як власних кутових функцій оператора Лапласа; ряд збігається швидко, а внесок кожної моди має чіткий фізичний зміст.

Приклад 2. Одновимірна теплопровідність із нульовими значеннями на краях: чебишевий спектральний підхід [35]

Нехай температура в стержні $x \in [-1;1]$ задовольняє рівняння

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),\ u(-1,t) = u(1,t) = 0,\ u(x,0) = f(x). \tag{3.18}$$

Класичний розв’язок базуватимется на синусних власних функціях, але для демонстрації рядів за ортогональними многочленами користуємося базисом Чебишова першого роду $\{T_n(x)\}$, ортогональним із вагою $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пишемо спектральне наближення

$$U_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) T_n(x), \tag{3.19}$$

використовуючи підхід Гальоркіна/тау. Граничні умови Діріхле накладають лінійні зв’язки на коефіцієнти: $u_N(\pm 1,t) = \sum_{n=0}^{N} (\pm 1)^n a_n(t) = 0.$ У методі тау ці дві умови замінюють рівняння для найвищих мод, тоді як для решти мод рівняння в резидуальному сенсі змушує похибку задовольняти ортогональні умови (до $T_N - 2$ включно).

Другі похідні в чебишевому базисі зручно виражати рекурентно або в матричній формі. У результаті отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь для вектора коефіцієнтів $a(t) = (a_0(t), \ldots, a_N(t))^T$:

$$Ma(t) = -kK\,a(t), \tag{3.20}$$

де матриця маси M відповідає скалярним добуткам $\left\langle T_i, T_j \right\rangle w$, а матриця жорсткості K – діям оператора другої похідної у цьому базисі з урахуванням граничних умов. У методі Гальоркіна M – діагональна (пропорційна π поправкою для нульової моди), а K – розріджена та смугово-структурована через тричленні рекуренції для T_n. [36]

Початкові коефіцієнти визначаємо ортогональним проєктуванням:

$$a(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\; a_0(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\; (n \ge 1). \tag{3.21}$$

Система інтегрується аналітично через спектральне розкладання пари (K, M): розв'язуємо узагальнену власну задачу $Kv^{(m)} = \gamma_m M v^{(m)}$, знаходимо M-ортонормований базис власних векторів і отримуємо явну еволюцію коефіцієнтів

$$a(t) = \sum_m e^{-k\lambda mt}\left(v^{(m)}\left(v^{(m)}\right)^T M\, a(0)\right). \tag{3.22}$$

Коефіцієнти спадатимуть швидко в часі завдяки додатності λ_m, а гладкість f гарантуватиме швидкий спектральний спад початкових проєкцій $a_n(0)$. Для практичних обчисленнях інтеграли для $a_n(0)$ беруться через квадратури Гаусса–Чебишова, а матричну систему збирають за відомими формулами диференціювання у чебишевому базисі; це дає високу точність при помірному N, добре задовольняє граничні умови і забезпечує контроль похибки в часі через множники $e^{-k\lambda mt}$.

Такий чебишевий підхід зручний, при умові коли початкова функція має помітні крайові особливості: вагова функція $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ “підсилює увагу” до країв, а вузли Чебишова концентруються поблизу ± 1, що покращує відтворення поведінки біля меж стержня. Якщо ж потрібна більш рівномірна точність на всьому інтервалі без особливих крайових ефектів, корисно розглянути аналогічну постановку у лежандрівому базисі з вагою 1.

ВИСНОВКИ

Розглядаючи питання, пов’язані з розкладом функцій у ряди Фур’є за ортогональними многочленами, робиться висновок, що такий підхід є однією з найважливіших та найпотужніших складових сучасного математичного аналізу та прикладної математики. Використання ортогональних систем, зокрема многочленів Лежандра, Чебишова та інших, дозволяє отримувати більш точні та стабільні апроксимації функцій навіть у випадках, коли класичний тригонометричний розклад є менш ефективним або вимагає складних перетворень. Ортогональність забезпечить простоту обчислення коефіцієнтів розкладу, оскільки вона призводитиме до незалежності внеску кожного члена ряду у загальний результат, що мінімізує взаємний вплив складових та підвищує точність.

Особливе значення має вибір системи ортогональних многочленів залежно від інтервалу визначення функції, її властивостей та умов задачі. Наприклад, многочлени Лежандра оптимальні для інтервалу від -1 до 1, де функція не має особливих точок і є відносно гладкою, тоді як многочлени Чебишова виявляють високу ефективність при наближенні функцій з швидкими коливаннями або різкими змінами, завдяки властивостям мінімізації максимальної похибки. Порівняння точності та збіжності показує, що в багатьох прикладних задачах розклади за ортогональними многочленами сходяться швидше, ніж тригонометричні ряди, і забезпечують меншу похибку при меншій кількості членів.

Методики побудови рядів Фур’є за ортогональними многочленами, розроблено різними науковцями, продемонстрували достатню гнучкість та універсальність цього інструменту. Серед них є аналітичні підходи, які базуються на строгих математичних виведеннях, та чисельні алгоритми, вони дозволяють ефективно знаходити коефіцієнти розкладу навіть для складних функцій, які не матимуть простих аналітичних виразів. Чисельні методи, зокрема використання квадратур Гауса чи методів найменших квадратів, відкривають можливість роботи з експериментальними даними та апроксимації функцій, отриманих у результаті вимірювань, що робить цей підхід особливо цінним у прикладних дослідженнях.

Прикладне значення рядів Фур'є за ортогональними многочленами виходить далеко за межі теоретичних задач. У математичній фізиці вони застосовуються для розв'язання рівнянь теплопровідності, хвильових рівнянь, задач дифузії та багатьох інших, де форма області або характер граничних умов робить використання класичних тригонометричних розкладів менш зручним. У таких випадках ортогональні многочлени дозволять можливість врахувати специфіку геометрії області чи фізичних процесів, що суттєво спрощує розрахунки та підвищує точність моделювання.

Розклади функцій у ряди Фур'є за ортогональними многочленами є універсальним інструментом, він поєднує високу математичну строгість з широкими можливостями практичного застосування. Вони дозволяють ефективно вирішувати задачі як чистої, так і прикладної математики, забезпечуючи при цьому гнучкість у виборі базису, високу точність наближення та швидку збіжність розкладів. З огляду на розвиток чисельних методів та комп'ютерних технологій, цей підхід продовжує розширювати свої можливості, стаючи незамінним у наукових дослідженнях, інженерних розрахунках та моделюванні складних фізичних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ряди Фур'є: навчальний посібник для студентів математичних та технічних спеціальностей. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі О. О. Синявська, Г. І. Сливка-Тилищак, П. В. Слюсарчук. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2024. 84 с. 6 – 21. (дата звернення: 10.08.2025).

2. Ряди Фур'є. Практикум. /Т.В. Авдєєва, О.Б. Качаєнко- К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 88 с. – Бібліогр.: с. 88. –100 пр. с. 7 – 11. (дата звернення: 10.08.2025).

3. Модуль 2: ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. *Інформаційно-обчислювальний центр – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*. URL: https://web.kpi.kharkov.ua/apm/wp-content/uploads/sites/82/2022/05/RD_Lektsiya_06.pdf (дата звернення: 10.08.2025).

4. Ортогональні многочлени. *Українські реферати*. URL: https://ukrbukva.net/84238-Ortogonal-nye-mnogochleny.html (дата звернення: 10.08.2025).

5. Григор'єв Ю. О. РЯДИ ФУР'Є : Конспект лекцій. Одеса, 2012. 16 с.

6. Ряди Фур'є: навчальний посібник для студентів математичних та технічних спеціальностей. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі О. О. Синявська, Г. І. Сливка-Тилищак, П. В. Слюсарчук. Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2024. 84 с.

7. *Apache Tomcat/9.0.65*. URL: http://dspace.megu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/1014/1/Стаття%20-%20Янчук%20П.%20С.pdf (дата звернення: 10.08.2025).

8. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навч. Посіб. Для студ. Вузів, які навч. За напрямами підготовки «Прикладна математика», «Механіка» / Г. Я. Попов [та ін.]. – Одеса : Астропринт, 2010. – 115 с.

9. Застосування формул гармонічного аналізу в комп'ютерних науках для підвищення надійності силового привода бурових установок | Scientific Bulletin of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas. *Scientific Bulletin of*

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas. URL: https://nv.nung.edu.ua/index.php/nv/article/view/551?utm_source=chatgpt.com (дата звернення: 10.08.2025).

10. Многочлени Лежандра, Чебишева і Лапласа. *Українські реферати*. URL: https://ukrbukva.net/page,2,21962-Mnogochleny-Lezhandra-Chebysheva-i-Laplasa.html (дата звернення: 13.08.2025).

11. Многочлени Лежандра, Чебишева і Лапласа. *Українські реферати*. URL: https://ukrbukva.net/21962-Mnogochleny-Lezhandra-Chebysheva-i-Laplasa.html (дата звернення: 13.08.2025).

12. Приймак А. О. МНОГОЧЛЕНИ ТА РЯДИ ЧЕБИШЕВА : Магістерька. Луцьк, 2024. 54 с.

13. O. D., V. H. APPLICATION OF LEGENDRE POLYNOMIALS TO INCREASE THE ORDER OF APPROXIMATION OF BLOCK METHODS. *Scientific papers of Donetsk National Technical University. Series: Informatics, Cybernetics and Computer Science*. 2024. Vol. 1, no. 38. P. 4–11. URL: https://doi.org/10.31474/1996-1588-2024-1-38-4-11 (date of access: 13.08.2025).

14. Ковальчук Л.В., Маслова Н.О. Математичні методи криптографії. Електронний навчальний посібник. – Дрогобич: ДВНЗ «ДонНТУ», 2024. – 146с.: рис. 3, означень 147, теорем 29, бібліогр. 19.

15. LibreTexts. 4.5: Многочлени Лежандра. *LibreTexts – Ukrayinska*. URL: 4.5: Многочлени Лежандра – LibreTexts – Ukrayinska (дата звернення: 13.08.2025).

16. Колотило, С. М. Ряди Фур'є та їх застосування : навч. Посіб. / С. М. Колотило. – Київ : КНУ ім. Т. Шевченка, 2017. – 184 с.

17. Королюк, В. С. Математичний аналіз. Частина 2 : підручник / В. С. Королюк, О. І. Сухенко. – Київ : Либідь, 2018. – 352 с.

18. Ляшко, І. І. Ортогональні многочлени та їх застосування : монографія / І. І. Ляшко. – Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2016. – 276 с.

19. Mason, J. C., Handscomb, D. C. Chebyshev Polynomials. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2002. – 341 с.

20. Szegő, G. Orthogonal Polynomials. – Providence, RI : American Mathematical Society, 1975. – 432 с.

21. Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods* / J. P. Boyd. – Boca Raton : CRC Press, 2001. – 434 с.

22. Trefethen, L. N. *Spectral Methods in MATLAB* / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 236 с.

23. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains* / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. – Berlin : Springer, 2006. – 699 с.

24. Wang, H. On the Optimal Estimates and Comparison of Gegenbauer Expansion Coefficients / H. Wang // *Applied Mathematics Letters*. – 2015. – Vol. 44. – с. 123–129.

25. Глушков, В. М., & Лук'яненко, І. Г. Чисельні методи : підручник. Київ : Вища школа, 2004. 327 с.

26. Копченова, Н. В., Марон, І. А. Чисельні методи аналізу : навч. посіб. / пер. з англ. М. А. Бурмістенкова. Київ : Наукова думка, 2008. 512 с.

27. Atkinson, K. An Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1989. 712 с.

28. Trefethen, L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. Philadelphia : SIAM, 2013. 305 с.

29. Abramowitz, M., & Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Washington : National Bureau of Standards, 1964. 1046 с.

30. Rivlin, T. J. Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1990. 272 с.

31. Бевз, Г. П., & Бевз, В. Г. Вища математика: навчальний посібник. Київ: Вища школа, 2015. 640 с.

32. Самойленко, А. М., & Левченко, І. Є. Математичний аналіз: підручник. Київ: Либідь, 2012. 512 с.

33. Філоненко, С. Ф., & Коваль, В. І. Чисельні методи: підручник. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018. 328 с.

34. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. 2nd ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2001. 688 p.

35. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1988. 557 p.

36. Trefethen, L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. Philadelphia: SIAM, 2013. 305 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

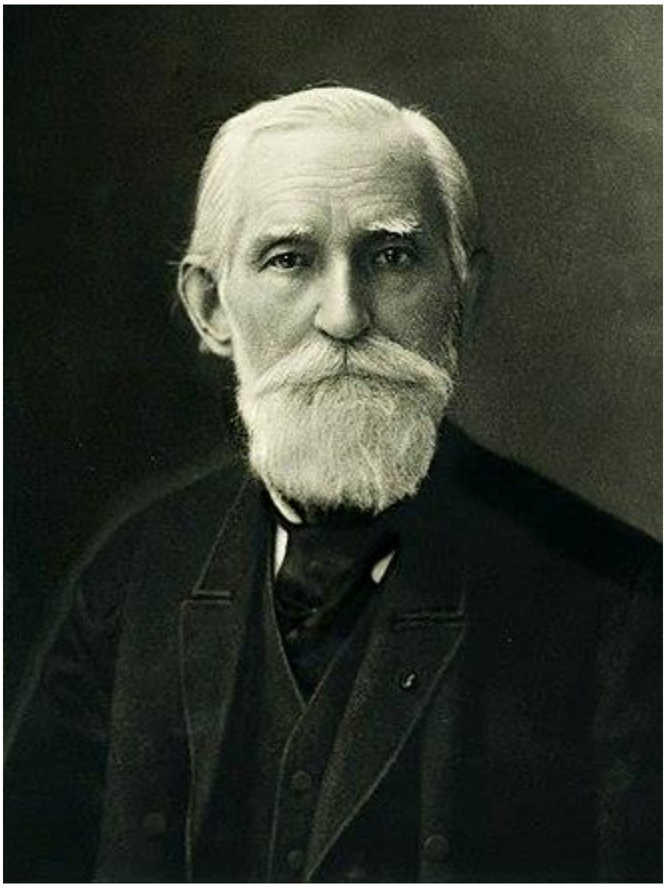
Мал. 2.1 – Сергій Михайлович Нікольський.

Додаток Б

Мал. 2.2 – О́вший Моисе́евич Наха́мкис.

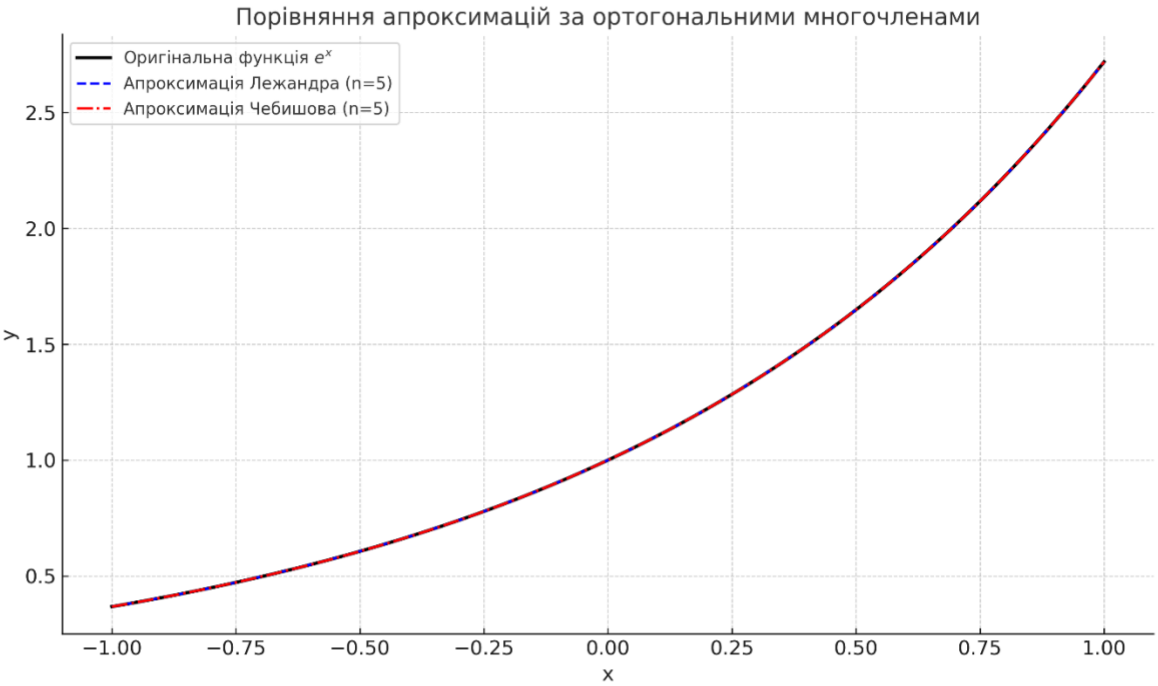
Додаток В

Мал. 2.3 – Французський математик Адріен Марі Лежандра.



Мал. 2.4 – Пафнутий Львович Чебишев.

Додаток Г



Мал. 3.1 - Графічне порівняння наближення функції e^x за допомогою многочленів Лежандра та Чебишова п'ятого степеня, де видно відмінності у поведінці апроксимацій у різних ділянках інтервалу $[-1,1]$.

Додаток Д

Метод	Точність наближення	Швидкість обчислень	Універсальність (для різних типів функцій)	Стійкість до похибок
Метод ортогональних проєкцій	Висока для неперервних і гладких функцій	Середня (потрібні інтеграли)	Добра, але обмежена інтервалом ортогональності	Висока
Метод мінімізації середньоквадратичної похибки	Дуже висока, особливо для гладких функцій	Низька для великих обсягів даних (потрібно багато обчислень)	Дуже висока, працює для широкого класу функцій	Дуже висока
Метод колокації	Середня для гладких функцій, знижується для розривних	Висока (розв'язання системи лінійних рівнянь)	Обмежена вибраними вузлами	Середня
Метод найменших квадратів з ваговими функціями	Висока, особливо при правильному виборі ваги	Середня	Висока, особливо для функцій із локальними особливостями	Висока

Таб. 3.1 - Таблиці ефективності методів побудови рядів Фур'є за ортогональними многочленами з урахуванням точності, швидкості обчислень, універсальності та стійкості до похибок.

АНОТАЦІЯ

Назарук А. Б. Ряди Фур'є за ортогональними многочленами. Магістерська робота для здобуття ступеня магістра за спеціальністю 111 «Математика». Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра теорії функцій та методики навчання математики. Луцьк, 2025. 45 с., список використаних джерел із 36 найменувань, 3 розділи, 8 підрозділів.

У даній роботі поглиблено досліджено ряди Фур'є за ортогональними многочленами як ефективний апарат для наближення функцій, що є актуальним для математичної фізики та чисельного аналізу. Розглянуто математичні основи розкладу, здійснено порівняння збіжності різних систем ортогональних многочленів (зокрема, Лежандра та Чебишова). Проаналізовано чисельні методи знаходження коефіцієнтів розкладу та представлено прикладне застосування отриманих результатів для розв'язання задач математичної фізики. Результати дослідження підтверджені графічними ілюстраціями.

Ключові слова: ряд Фур'є, ортогональні многочлени, збіжність, чисельний метод, поліноми Лежандра, математична фізика.

ANNOTATION

Nazaruk A. B. Fourier Series in Orthogonal Polynomials. Master's thesis for the degree of master in specialty 111 "Mathematics". Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of Function Theories and Methods of Teaching Mathematics. Lutsk, 2025. 45 p., list of references including 36 sources, 3 chapters, 8 subsections.

This thesis provides an in-depth study of Fourier series in orthogonal polynomials as an effective apparatus for function approximation, which is relevant for mathematical physics and numerical analysis. The mathematical foundations of the expansion are considered, and the convergence of various systems of orthogonal polynomials (including Legendre and Chebyshev) is compared. Numerical methods for finding expansion coefficients are analyzed, and the practical application of the obtained results for solving problems in mathematical physics is presented. The research findings are supported by graphical illustrations.

Keywords: Fourier series, orthogonal polynomials, convergence, numerical method, Legendre polynomials, mathematical physics.