МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

на правах рукопису

Гурич Анатолій Миколайович

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ПОХІДНОЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Науковий керівник:
ЖИГАЛЛО КОСТЯНТИН МИКОЛАЙОВИЧ
Доцент кафедри теорії функцій та методики навчання математики, кандидат фіз.-мат. наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № __________

Засідання кафедри теорії функцій та методики навчання математики

від ______________ 20 ___ р.

Завідувач кафедри

доц. Гембарська С.Б. __________

Луцьк–2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження використання комп'ютених технологій при вивченні похідної в курсі алгебри та початків аналізу зумовлена тим, що сучасна шкільна математична освіта перебуває в умовах активної цифрової трансформації. Чинна програма з математики для 10-11 класів (рівень стандарту та профільний рівень), Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти, Концепція «Нова українська школа» та Стратегія цифровізації освіти України до 2027 року однозначно визначають інтеграцію комп'ютерних технологій як один з пріоритетних напрямів розвитку навчального процесу.

Тема «Похідна функції та її застосування» посідає особливе місце в курсі алгебри та початків аналізу. Вона є першим кроком учнів до диференціального числення, формує вміння досліджувати функції, розв'язувати задачі на екстремуми та найбільше–найменше значення, встановлювати зв'язок математики з фізикою, економікою, біологією. Проте результати зовнішнього незалежного оцінювання та національного мультипредметного тесту 2019-2025 років та діагностичні роботи Українського центру оцінювання якості освіти свідчать про стабільно низький рівень виконання саме завдань, пов'язаних з розумінням геометричного та фізичного змісту похідної, побудовою дотичних, аналізом поведінки функцій за допомогою похідної та задачами прикладного характеру.

Основною причиною залишається переважання традиційного підходу, а саме, аналітичне обчислення похідних за таблицею, ручна побудова графіків, статичні ілюстрації в підручниках. Такий спосіб навчання не дає учням відчути динаміку зміни кута нахилу дотичної, миттєво встановити зв'язок між знаком похідної та монотонністю функції, спостерігати одночасну поведінку функції, швидкості й прискорення в реальному часі. В результаті, значна частина учнів засвоює матеріал формально, що ускладнює подальше вивчення математичного аналізу у вищій школі та застосування математики в професійній діяльності.

Застосування комп'ютерних технологій усуває дані обмеження, забезпечуючи інтерактивну візуалізацію, анімацію процесів, миттєве варіювання параметрів, автоматизацію обчислень та моделювання реальних ситуацій. Дослідження вітчизняних та зарубіжних вчених (В. Ю. Биков, Ю. В. Горошко, Д. Талл, Дж. Конфрі та ін.) доводять, що системне використання комп'ютерних технологій значно підвищує мотивацію учнів, розвиває дослідницькі вміння та сприяє переходу від репродуктивного до творчого рівня засвоєння складних математичних понять.

Водночас, в практиці більшості українських шкіл комп'ютерні технології при вивченні похідної застосовуються епізодично або взагалі відсутні через брак теоретично обґрунтованого, готового до використання методичного забезпечення, адаптованого до чинної програми та реальних умов закладу освіти. Саме тому розробка й експериментальна перевірка ефективності такого забезпечення становить актуальну науково-практичну проблему.

Метою кваліфікаційної роботи є теоретичне обґрунтування, розробка та експериментальна перевірка ефективності методичного забезпечення використання комп'ютерних технологій при вивченні похідної в курсі алгебри та початків аналізу.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та початків аналізу учнів 10-11 класів закладів загальної середньої освіти.

Предметом дослідження є зміст, форми й методи використання комп'ютерних технологій при формуванні поняття похідної та розвитку відповідних математичних компетентностей учнів.

Для досягнення поставленої мети потрібно виконати наступні завдання:

1) проаналізувати зміст теми «Похідна функції» в чинній програмі з математики та вимоги до рівня її засвоєння;

2) узагальнити психолого-педагогічні та дидактичні засади формування поняття похідної в учнів старшої школи;

3) розглянути сучасні комп'ютерні технології, придатні для навчання математики;

4) розробити комплекс дидактичних матеріалів та методичних рекомендацій з використання комп'ютерних технологій при вивченні похідної;

5) експериментально перевірити ефективність запропонованого методичного забезпечення та сформулювати практичні рекомендації для вчителів.

Методами дослідження використаними в кваліфікаційній роботі є аналіз, порівняння, узагальнення, систематизація, спостереження, тестування, методи математичної статистики.

Практична значущість дослідження зумовлена можливістю безпосереднього використання розроблених матеріалів (конспекти уроків, інтерактивні демонстрації, системи завдань, рекомендації) вчителями математики, викладачами ЗВО та в системі підвищення кваліфікації педагогів.

Апробація результатів дослідження: результати дослідження були представлені у вигляді тез на X Міжнародній науково-практичній конференції «Математика в сучасному технічному університеті» та XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука. Тези були опубліковані в збірниках матеріалів конференції.

Структура роботи містить вступ, три основні розділи, висновки, список використаних джерел. Повний обсяг роботи становить 85 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Поняття похідної та її місце в чинній програмі з математики для 10-11 класів

Поняття похідної є одним з ключових в математиці, так як використовується в різних її розділах. Отже, до визначення поняття похідної потрібно підходити грунтовно. Одним з важливих інструментів для визначення поняття похідної є поняття границі. Теорія границь є важливим розділів математичного аналізу, так як є сполучною ланкою для визначення різних понять, таких як похідна, інтеграл і т. д.

Нехай задана деяка довільна функція виду [5]

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

яка задана на певному інтервалі. Кожному значенню аргументу *x*, відповідає єдине значення функції $y = f(x)$.

Якщо задати приріст Δx для x, тоді $y = f(x)$ також отримає приріст Δy. Звідси:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.2}$$

Приріст Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.3}$$

Таким чином:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.4}$$

При $\Delta x \to 0$ формулюється означення похідної в точці x і позначається $f'(x)$. Таким чином,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

або

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.5}$$

Означення 1.1 Похідною функції $y = f(x)$ є границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при $\Delta x \to 0$. [12]

Отже, строге означення похідної ґрунтується на знанні теорії границь.

Похідна позначається наступним чином

$$y', \quad y'_x, \; \frac{dy}{dx} \tag{1.6}$$

Для більш наочного уявлення поняття похідної потрібно розглянути декілька прикладів.

Приклад 1. $y = x^2$. Знайти y' для $y = x^2$:

1) $\forall x$,

2) В точці $x = 3$.

При $x + \Delta x$, маємо $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

Тепер потрібно знайти $\frac{\Delta x}{\Delta y}$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{1.7}$$

Складаємо відношення $\frac{\Delta x}{\Delta y}$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \tag{1.8}$$

Тепер можна знайти похідну функції:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \tag{1.9}$$

Таким чином,

$$y' = 2x \tag{1.10}$$

В точці $x = 3$:

$y'\big|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 2. $y = \frac{1}{x}$. Зайти y'.

По аналогії з попереднім прикладом:

$$y = \frac{1}{x};\ y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}; \tag{1.11}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}; \tag{1.12}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}. \tag{1.13}$$

На практиці, найчастіше для знаходження похідної використовується таблиця похідних елементарних функцій, а також правила диференціювання. Похідна за означенням знаходиться лише для того, щоб зрозуміти, яким чином влаштовано поняття похідної [5].

Геометричний зміст похідної.

Окрім аналітичного означення, похідна має геометричне трактування. Геометричний зміст похідної використовується як при розв'язуванні алгебраїчних, так і при вирішенні розв'язуванні задач. Геометричний зміст похідної дозволяє поглянути на це поняття з принципово іншої точки зору для того щоб розширити його. Так як дослідження більшості кривих використовує поняття похідної, то означення геометричного змісту буде доречним [11].

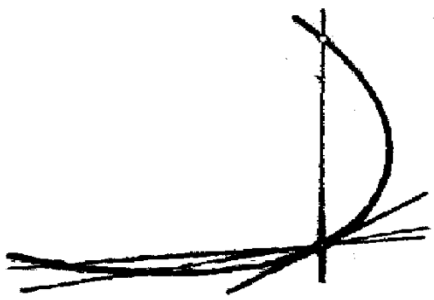


Рис. 1.1 Січна, проведена до кривої

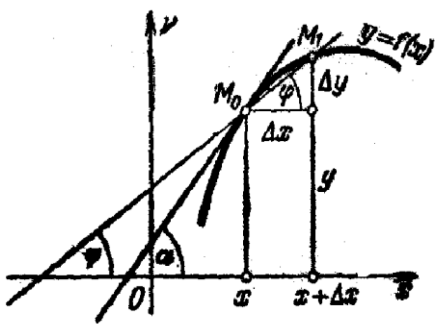


Рис. 1.2 Геометричний зміст похідної

Нехай задана крива, з точкою M_0. Тепер потрібно виділити ще одну точку M_1 і провести січнуM_0M_1 (рис. 1.1). Січна M_0M_1 приймає різне положення M_0M_1', M_0M_1'' і т. д.

Якщо січна прагне зайняти положення певної прямої M_0T, тоді ця пряма є дотичною до кривої в точці M_0.

Означення 1.2. Пряма, задана рівнянням

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.14}$$

є дотичною до графіку функції f в точці x_0 [6].

Нехай $f(x)$ деяка функція, яка може бути інтерпретована в декартовій системі координат з допомогою кривої (рис. 1.2).

Дана функція приймає в кожній точці x тільки одне значення $y = f(x)$. Точка $M_0(x, y)$ знаходиться на кривій. Аргумент $x + \Delta x$ має приріст $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. На кривій, $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Нехай φ кут, між січною і віссю Ox. Тоді,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi. \tag{1.15}$$

Якщо $\Delta x \to 0$, тоді точка M_1буде рухатись вздовж кривої, наближаючись до M_0. При $\Delta x \to 0$ кут $\varphi \to \alpha$, тоді пряма, буде шуканою дотичною.

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{1.16}$$

Таким чином,

$$f'(x) = tg\,\alpha \tag{1.17}$$

Поняття похідної функції входить до курсу алгебри та початків аналізу як один з фундаментальних елементів математичної підготовки учнів старшої школи. Відповідно до чинної навчальної програми з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, вивчення похідної передбачено на двох рівнях, стандарту та профільному. На рівні стандарту тема «Похідна функції та її застосування» інтегрується в загальний курс математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) та становить 20-25 годин навчального часу в 11 класі, залежно від розподілу годин на тиждень. На профільному рівні обсяг сягає 35 годин, з акцентом на поглиблене вивчення [2].

Місце теми в структурі курсу визначається логікою послідовного розвитку математичного мислення. В 10 класі учні опановують основи функцій, їх властивості, методи побудови графіків та елементарні перетворення. Похідна з’являється в 11 класі як інструмент кількісного аналізу цих властивостей, що дозволяє перейти від описового підходу до аналітичного. На рівні стандарту похідна вводиться в контексті алгебри і початків аналізу, паралельно з елементами геометрії, для формування базових компетентностей. На профільному рівні вона розширюється до повного диференціального числення, з подальшим переходом до інтеграла в кінці курсу. Така структура відповідає Державному стандарту базової і повної загальної середньої освіти, де акцент робиться на компетентнісному підході, учень має не лише обчислювати, а й інтерпретувати результати в реальних ситуаціях.

Застосування похідної на рівні стандарту зосереджене на простих задачах, визначення інтервалів зростання/спадання за знаком похідно, знаходження точок екстремуму, побудова ескізу графіка. Прикладні задачі включають оптимізацію, знаходження мінімального шляху, максимального об’єму, базові моделі з фізики. На профільному рівні додаються похідні складених функцій, друга похідна для дослідження опуклості, точки перегину, повне дослідження функцій з параметрами та розширені прикладні моделі (економіка, біологія).

Вимоги до рівня засвоєння диференційовані за чотирма ступенями, як визначено в програмі. На першому ступені учень відтворює означення, таблицю похідних та обчислює похідні простих функцій. Другий ступінь передбачає застосування правил до раціональних і тригонометричних функцій, складання рівняння дотичної. Третій ступінь включає дослідження монотонності, екстремумів та розв’язування стандартних оптимізаційних задач. Четвертий ступінь вимагає аналізу функцій з параметрами, інтерпретації результатів в контексті реальних процесів та самостійного моделювання. Структура теми «Похідна функції та її застосування» на рівні стандарту зображена в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Структура теми «Похідна функції та її застосування» на рівні стандарту

№	Зміст навчального матеріалу	Орієнтовна кількість годин	Ключові навчальні результати
1	Вступ: задача про швидкість руху. Приріст функції та аргументу	2	Пояснення границі як основи похідної
2	Означення похідної. Геометричний та фізичний зміст	3	Запис означення, рівняння дотичної
3	Таблиця похідних елементарних функцій. Правила диференціювання	4	Обчислення похідних многочленів
4	Застосування похідної: інтервали монотонності, екстремуми	5	Визначення знаку похідної для аналізу
5	Побудова ескізів графіків за допомогою похідної	3	Ескіз графіка з урахуванням похідної
6	Задачі на найбільше та найменше значення функції	4	Розв’язування оптимізаційних задач
7	Прикладні задачі та узагальнення	3	Моделювання реальних процесів
	Разом	24	

На рівні стандарту програма акцентує базове розуміння похідної як інструменту для опису змін, без надмірної формалізації, що дозволяє адаптувати матеріал до учнів з різним рівнем підготовки. Це відрізняється від профільного рівня, де акцент на теоретичній глибині та складних обчисленнях. Структура теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні зображена в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Структура теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин	Основні очікувані результати вивчення
1	Мотивація. Задачі, що призводять до поняття похідної (швидкість, дотична)	2	Учень обґрунтовує необхідність введення похідної через прикладні задачі
2	Приріст функції та аргументу. Означення похідної як границі. Механічний та геометричний зміст	4	Учень записує означення похідної трьома способами, пояснює геометричний і фізичний зміст
3	Таблиця похідних елементарних функцій. Правила диференціювання (сума, добуток, частка)	5	Учень вільно обчислює похідні раціональних, ірраціональних і тригонометричних функцій

4	Похідна складеної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна оберненої функції	5	Учень диференціює складні вирази, застосовує логарифмічне диференціювання
5	Друга похідна. Опуклість та увігнутість кривої, точки перегину	4	Учень визначає інтервали опуклості/вгнутості, знаходить точки перегину
6	Дослідження функції за допомогою першої та другої похідних (монотонність, екстремуми, асимптоти)	6	Учень проводить повне дослідження функції, складає схему дослідження
7	Побудова графіків функцій з використанням похідних	4	Учень будує точні ескізи графіків складних функцій
8	Задачі на найбільше та найменше значення функції на відрізку	4	Учень розв’язує оптимізаційні задачі алгебраїчним та геометричним способами
9	Прикладні задачі (фізика, економіка, біологія, екологія)	4	Учень складає математичні моделі реальних процесів і досліджує їх за допомогою похідної
10	Узагальнення теми. Тематичне оцінювання	3	Учень виконує комплексні завдання високого рівня складності
	Разом	41	(з урахуванням резерву та корекції)

Саме на профільному рівні формується готовність учнів до вивчення математичного аналізу у вищій школі, тому саме тут особливо гостро постає потреба в комп’ютерних технологіях, які дозволяють візуалізувати складні процеси (зміну знака другої похідної, поведінку функцій з параметрами, динаміку фізичних систем), що неможливо реалізувати повною мірою традиційними засобами.

1.2 Особливості застосування комп’ютерних технологій як засобу навчання математики в старшій школі

В сучасних умовах дедалі гостріше постає питання доцільності та ефективності використання комп’ютерних технологій в навчальному процесі, адже попередні покоління успішно опановували математичні знання без їх застосування. Проте науково-технічний прогрес зумовлює необхідність інтеграції нових засобів в систему освіти, оскільки відмова від них суперечить загальним тенденціям розвитку суспільства та вимогам до підготовки конкурентоспроможного фахівця.

Комп'ютерні технології відкривають принципово нові можливості для вдосконалення освітнього процесу. В сучасній школі цю вимогу вже не можуть повною мірою задовольнити статичні схеми, таблиці чи ілюстрації підручників. Натомість цифрові технології дають змогу реалізувати динамічну, інтерактивну наочність, яка відповідає природній схильності учнів до діяльнісного та ігрового пізнання [26].

Застосування комп'ютерних технологій забезпечує реалізацію принципів індивідуалізації та диференціації навчання. Кожен учень отримує можливість самостійно працювати з навчальним матеріалом у власному темпі, неодноразово повертатися до складних фрагментів, обирати оптимальний для себе спосіб засвоєння інформації. Такі технології однаково ефективні як в умовах очного, так і дистанційного навчання, як в міських, так і в сільських школах, що сприяє забезпеченню рівного доступу до якісної освіти.

Важливою перевагою є можливість інтеграції національної системи освіти в глобальний інформаційний простір, що відповідає світовим тенденціям розвитку освітньої сфери. Використання цифрових засобів підвищує мотивацію учнів до навчання, стимулює самоосвітню діяльність, розвиває творчі здібності, формує навички пошуку, аналізу та систематизації інформації, а також сприяє набуттю практичних умінь роботи з сучасними інформаційними технологіями, що повністю відповідає соціальному запиту держави до школи.

Системи мультимедіа дають змогу створювати електронні навчальні посібники, які значно перевищують традиційні підручники за рівнем наочності, інформативності та зручності використання. Посібники містять теоретичний матеріал, інтерактивні вправи, контрольні завдання, лабораторні роботи, питання для самоперевірки, а також мультимедійні елементи (відео, анімації, звуковий супровід), що істотно підвищують пізнавальний інтерес та полегшують сприйняття складних понять. Компактність, можливість швидкого пошуку потрібного фрагмента та інтерактивність роблять електронний посібник зручнішим інструментом порівняно з друкованим виданням [27].

Використання комп'ютерних технологій в процесі уроку, зокрема в умовах локальної мережі класу, дозволяє вчителеві здійснювати індивідуальний підхід до кожного учня, оперативно відстежувати рівень засвоєння матеріалу, виявляти та коригувати прогалини в знаннях. Водночас вчитель звільняється від рутинних операцій (перевірка великої кількості однотипних вправ, механічне повторення пояснень) та може зосередитися на творчій, евристичній складовій педагогічної діяльності.

Цифрові технології відкривають широкі можливості для професійного розвитку педагогів: швидкий обмін досвідом через спеціалізовані платформи, участь в дистанційних курсах підвищення кваліфікації, ознайомлення з новітніми методиками навчання. Все це сприяє постійному вдосконаленню професійної компетентності вчителя математики.

В навчанні математики комп'ютерні програми використовуються як потужний ілюстративний матеріал, засіб автоматизованого контролю знань, інструмент розв'язування творчих та дослідницьких задач, платформа для проведення дистанційних занять, а також для створення індивідуальних навчальних траєкторій. Вони дають змогу поєднувати традиційні форми роботи з інноваційними, зокрема з уроками-іграми, проєктною діяльністю, моделюванням реальних процесів.

Впровадження комп'ютерних технологій в навчальний процес не лише підвищує ефективність засвоєння математичних знань, а й формує в учнів важливі навички володіння сучасними інформаційними засобами, розвиває творчий потенціал, розширює світогляд. Учні вчаться не лише відтворювати готові знання, а й самостійно їх здобувати, критично осмислювати, застосовувати в нових ситуаціях [26].

В контексті стрімкого розвитку інформаційного суспільства використання комп'ютерних технологій в шкільній освіті є необхідною умовою підготовки покоління, здатного генерувати нові ідеї, працювати з великими масивами інформації та ефективно реалізовувати свій інтелектуальний потенціал у всіх сферах наукової й практичної діяльності.

Дидактичні принципи в умовах комп’ютеризованого навчання [19]:

1. Принцип системності вимагає раціонального поділу навчального матеріалу на змістові фрагменти та поетапного їх опанування з постійним зверненням до цілого; кожен урок є частиною циклу уроків, пов’язаною з іншими частинами та спрямованою на розв’язання спільних завдань. У комп’ютеризованому навчанні принцип системності:

– передбачає розробку та обґрунтування формалізованої моделі предметної галузі під час проєктування відповідної навчальної програми;

– віддає перевагу пакетам програм за групами тем і навіть за цілими курсами порівняно з окремими, хоч і досконалими, розрізненими програмами;

– ставить питання про форми використання обчислювальної техніки та про співвідношення нових і традиційних форм навчання.

2. Принцип активності (самостійності) передбачає, що навчальна діяльність має бути творчою працею, спрямованою на всебічний саморозвиток особистості учня. Комп’ютер активно залучає учнів до навчального процесу. Однією з найважливіших передумов такого залучення є діалог учня з комп’ютером, у ході якого [19]:

– новоздобуте знання включається в систему діяльності учня;

– учень отримує можливість свідомо керувати власною навчальною діяльністю. Умови ефективності побудови навчального діалогу в навчальній програмі [19]:

– подолання надмірної заздалегідь заданості відповідей учня, які зазвичай зводяться або до вибору з кількох варіантів, або до введення ключового слова;

– наявність поля самостійності в навчальній програмі, коли учень може обрати власний шлях розв’язання, оцінити його ефективність; сам учень має визначати необхідний йому рівень допомоги та рівень викладу теоретичного матеріалу (більш чи менш абстрактний);

– правильний добір мотивуючих реплік і звукових ефектів у навчальній програмі з урахуванням психологічних особливостей учня.

3. Принцип поетапного подолання труднощів (доступності) передбачає врахування вікових особливостей учня під час вибору методів і засобів навчання. В комп'ютеризованому навчанні цей принцип означає необхідність розробки та використання в педагогічних програмних засобах психологічно обґрунтованих моделей учня й процесу навчання. Виходячи з психологічних особливостей мисленнєвої діяльності учнів, під час створення педагогічних програмних засобів необхідно [19]:

– дуже ретельно добирати завдання для учнів;

– ґрунтовно продумувати зміст діалогу учня з комп'ютером. Завдання мають бути посильними для кожного конкретного учня, не втомлювати одноманітністю, їхня складність повинна поступово зростати. Програма має передбачати зміну рівня складності завдань уже на ранніх етапах роботи, що дає змогу індивідуалізувати досягнення обов'язкового рівня навчання кожним учнем.

4. Принцип зв'язку теорії з практикою. Застосування комп'ютера дає змогу суттєво посилити практичну спрямованість навчання, оскільки комп'ютер має унікальні можливості моделювання, зокрема імітаційного, різноманітних процесів – від фізичних і хімічних до соціальних. Комп'ютер здатен «занурити» учнів у будь-яке середовище. Доцільним є використання в закладі освіти методів комп'ютерного проєктування та моделювання. Педагогічні програмні засоби, застосовувані в навчанні, можуть сприяти профорієнтації учнів, їхньому економічному, екологічному та іншим видам виховання.

5. Принцип наочності. Ілюстративні можливості комп'ютера, попри їхню очевидність, не є основними. Їхнє завдання – слугувати зовнішньою опорою внутрішньої діяльності учнів зі засвоєння знань [14]. З погляду наочності слід розрізняти навчальні та ігрові програми. У навчальних програмах колір і графіка мають використовуватися виважено: розбиття на кадри, виділення головного тощо. Ігрові програми мають бути орієнтовані на досягнення педагогічного результату: розвиток мислення, пам'яті учнів, активізацію їхньої пізнавальної, психомоторної та іншої діяльності. Елементи гри доцільно

включати в програми-тренажери: після правильного виконання завдання – коротка гра як винагорода та емоційне розвантаження. Тут виправдане багатство кольорів і різноманітність графіки. Там, де змістом навчання виступають зовнішні властивості речей, принцип наочності повністю себе виправдовує. Проте там, де змістом стають зв’язки та відношення предметів, наочність виявляється недостатньою. Тут набуває чинності принцип моделювання. Це якісно новий рівень наочності, широкі можливості для якого створюють програми, що передбачають показ об’ємних фігур, дають змогу розглядати їх з усіх боків, розсікати площинами тощо.

6. Принцип поєднання індивідуалізації та колективізації. Впровадження комп’ютерних технологій навчання [19]:

– є одним зі шляхів досягнення збалансованості індивідуальних і колективних форм навчання;

– комп’ютер дає змогу кожному учневі працювати в прийнятному для нього темпі;

– створює можливість рівневої диференціації: залежно від якості відповідей учень переводиться на вищий або нижчий рівень навчання;

– різні варіанти педагогічних програмних засобів дозволяють обрати навчальну програму, що відповідає індивідуальним особливостям учня;

– об’єднує учнів між собою та з педагогом (спільне розв’язання проблеми на уроці або як домашнє завдання);

– групова робота з комп’ютером на уроці чи групові домашні завдання створюють умови для розвитку навичок ділового спілкування в процесі обговорення варіантів розв’язання поставлених задач.

7. Принцип ефективності (оптимізації) навчання. В умовах комп’ютеризації реалізація цього принципу висуває такі проблеми [19]:

– якість (ефективність) самих навчальних програм: їхній навчальний вплив і вплив на мотивацію навчання;

– співвідношення та взаємна ув’язка традиційного й комп’ютеризованого навчання: місце й роль педагога в умовах навчання за даною темою з використанням конкретного педагогічного програмного засобу в даному класі (групі);

– поєднання комп'ютерних технологій із традиційною класно-урочною системою навчання, яка є неоптимальною з погляду індивідуалізації навчання та активізації учнів;

– економічна ефективність використання комп'ютерів.

Комп'ютерні технології є обов'язковим і системним компонентом навчання математики в старшій школі України.

1.3 Огляд сучасних комп'ютерних технологій у навчанні математики

З розвитком обчислювальної математики нерозривно пов'язаний розвиток програмування, яке дозволяє спростити способи взаємодії людини та ЕОМ. За багато років накопичені великі бібліотеки наукових підпрограм на різних алгоритмічних мовах, призначених для розв'язання типових задач обчислювальної математики. Крім того, є цілий ряд різних математичних пакетів, що реалізують різноманітні чисельні методи та проводять аналітичні математичні перетворення.

Найбільш відомими сьогодні є пакети прикладних програм та математичні бібліотеки: MatLab (компанія The MathWorks), Maple (компанія Waterloo Maple Inc), Mathematica (компанія Wolfram Research), MathCAD (компанія MathSoft Inc). Пакет Maple [7] також популярний в наукових колах. Окрім аналітичних перетворень, пакет розв'язує завдання чисельно. Характерною особливістю пакету є те, що він дозволяє конвертувати документи в формат LaTeX-стандартний формат переважної більшості наукових видавництв [8].

Ряд інших програмних продуктів використовують інтегрований символічний процесор Maple. Наприклад, пакет підготовки наукових публікацій Scientific WorkPlace дозволяє звертатися до символічного процесора Maple, проводити аналітичні перетворення та вбудовувати отримані результати в документ.

Пакет MatLab [10] фактично являє собою своєрідну мову програмування високого рівня, орієнтований на розв'язування наукових задач. Характерною особливістю пакету є те, що він дозволяє зберігати документи в форматі мови програмування C.

Пакет Mathematica [9] є сьогодні найбільш популярним в наукових колах, особливо серед теоретиків. Пакет надає широкі можливості в проведенні символічних (аналітичних) перетворень, проте вимагає значних ресурсів комп'ютера. Система команд пакета багато в чому нагадує звичайну мову програмування.

Пакет MathCAD [8] популярний, мабуть, більше в інженерному, ніж в науковому середовищі. Характерною особливістю пакету є використання звичних стандартних математичних позначень, тобто документ на екрані виглядає точно так само, як звичайний математичний розрахунок. Для використання пакета не потрібно вивчати будь-яку систему команд, як, наприклад, у випадку пакетів Mathematica або Maple.

Пакет орієнтований в першу чергу на проведення чисельних розрахунків, але має вбудований символічний процесор Maple, що дозволяє виконувати аналітичні перетворення. В останніх версіях передбачена можливість створювати зв'язки документів MathCAD з документами MathLab. На відміну від згаданих вище пакетів, MathCAD є середовищем візуального програмування, тобто не вимагає знання специфічного набору команд, що говорить про те, що він легко інтегрується в освітній процес.

Останнім часом проглядається тенденція до зближення та інтеграції різних пакетів. Наприклад, останні випуски пакетів Mathematica та Maple мають хороші можливості для візуального програмування; в MatLab включена бібліотека аналітичних перетворень Maple; MathCAD дозволяє працювати спільно з MatLab.

Пакет MathCAD найбільш відповідає вимогам обчислювальної середовища при вивченні обчислювальної математики: звичні стандартні математичні позначення, середовище візуального програмування, можливість символьних обчислень, дружній інтерфейс, відносна невибагливість до можливостей комп'ютера.

Для більш детального ознайомлення варто розглянути декілька прикладних пакетів в контексті обчислення похідних.

MatLab

В мові програмування Matlab існує безліч інструментів для роботи з диференціюванням функцій. Операція диференціювання є однією з основних для аналізу математичних моделей та розв'язування різних задач. В Matlab можна використовувати як символічні обчислення, так і чисельні методи [10].

Символьне диференціювання

Для виконання диференціювання в Matlab використовується символічний двигун, який надається пакетом Symbolic Math Toolbox. Для початку потрібно створити символічну змінну за допомогою команди syms (рис. 1.3).

```
syms x
f = x^3 + 5*x^2 - 2*x + 1;
df = diff(f, x);
disp(df);
```

Рисунок 1.3 Створення символьної змінної в MatLab

Цей код створює символьну змінну x, потім визначає функцію f, та здійснює її диференціювання по x з допомогою функції $diff$. Результат: похідна функція буде виведена як вираз.

Функція $diff$ використовується для знаходження похідних:

– $diff(f,x)$ – похідна функції f по змінній x;

– можна також обчислювати похідні вищих порядків, наприклад, $diff(f,2)$ друга похідна.

Приклад обчислення похідної (рис. 1.4)

```
syms x
f = x^4 - 3*x^2 + 2*x - 5;
df = diff(f, x);
d2f = diff(f, 2);
disp(df);
disp(d2f);
```

Результат:

```
df = 4*x^3 - 6*x + 2
d2f = 12*x^2 - 6
```

Рисунок 1.4 – Приклад обчислення похідної в MatLab

MAPLE

Для обчислення звичайних і частинних похідних в Maple використовується команда (функція) *diff* , перший аргумент, в якої є диференційована функція, а другий - змінна, за якою потрібно брати похідну (рис. 1.5) [7].

```
> diff(sqrt(x^2+3), x);
```

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

```
> diff(diff(z*sin(z), z), z); diff(z*sin(z), z, z);
```

$$2\cos(z) - z\sin(z)$$

$$2\cos(z) - z\sin(z)$$

Рисунок 1.5 – Приклад знаходження звичайної та частинної похідних в Maple

MathCad

Аналогічно більшості інших найбільш важливих математичних операцій, в MathCad існує чисельне та символьне диференціювання. Символьний метод має переваги в тому плані, що результат можна одержати у вигляді функції, яку можна буде використовувати в подальших розрахунках. Чисельний же підхід має переваги в деяких специфічних задачах. MathCad дозволяє обчислювати як звичайну похідну, так і похідні більш високих порядків, а також часткові похідні (рис. 1.6).

Оператор простого диференціювання на панелі Calculus для обчислення першої похідної має два маркери, принцип заповнення яких такий: у верхній вводиться функція, у нижній – змінна, за якою обчислюється похідна.

Рисунок 1.6 – Діалогове вікно для обчислення похідних

Результат може бути представлено в символьному вигляді, якщо використати оператор символьного виведення →, а потім звернутися до символьного процесора Symbolic/Evaluate (Символіка/Обрахувати в символах) (рис. 1.7).

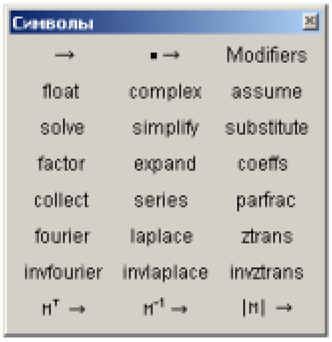


Рисунок 1.7 – Меню символьного процесора Symbolic для обчислення в символах

Під час символьного диференціювання можна оперувати з функціями декількох змінних. Оператор диференціювання може поєднуватися з будь-яким обчислювальним або символьним оператором. Особливо корисним є оператор Simplify, так як вираз похідної подається в неспрощеному вигляді. Для спрощення відповіді варто використовувати оператори Collect (наводити подібні), Factor (розкладає вирази на множники) та Expand (розкриває дужки) [8].

Ще однією важливою програмою, яка може бути використана для вивчення похідної та її застосувань є GeoGebra [25].

Найефективніше застосування GeoGebra під час вивчення теми «Похідна та її застосування» доцільне на таких етапах:

– розв'язування задачі, що приводить до введення поняття похідної як кутового коефіцієнта дотичної (рекомендується використовувати інтерактивну модель із графіком функції та рухомою дотичною, положення якої учні можуть змінювати самостійно);

– обчислення похідної функції (здатність програми миттєво показувати результат дозволяє учням здійснювати оперативну самоперевірку та порівнювати власні аналітичні обчислення з отриманими в GeoGebra);

– складання рівняння дотичної до графіка функції (після аналітичного визначення рівняння прямої доцільно ввести в програму графік функції та побудовану пряму, щоб візуально переконатися, чи є вона дійсно дотичною в заданій точці);

– дослідження функції на монотонність, екстремуми, опуклість та точки перегину (після теоретичного аналізу за допомогою першої та другої похідних у зошиті слід відтворити графік у GeoGebra і перевірити правильність зроблених висновків);

– проведення повного дослідження функції за стандартною схемою з подальшою побудовою її графіка (програма дає можливість учням самостійно виконати самоперевірку якості дослідження, порівнюючи власні висновки з інтерактивним графіком);

– розв’язування задач на застосування похідної, зокрема прикладного характеру (використання GeoGebra для моделювання та дослідження реальних процесів і залежностей значно підвищує наочність і переконливість отриманих результатів) [27].

Приклад знаходження дотичної до графіку функції зображено на рисунку 1.8:

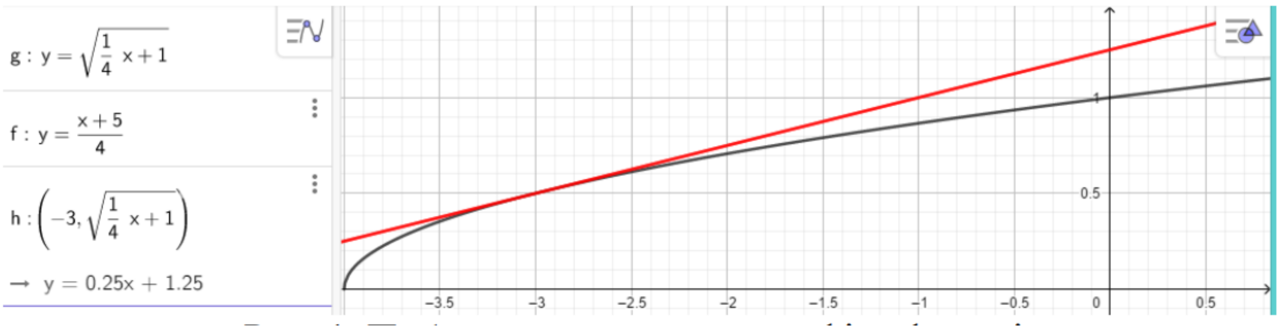


Рисунок 1.8 – Побудова дотичної до графіку функції

На рисунку 1.8 використано два способами перевірки: дотична, яка була визначена аналітично і та, яка була знайдена програмою, співпали, що свідчить про правильність розв’язку. Доцільність даного методу обумовлена насамперед тим, що на перевірку витрачається невелика кількість часу, що прискорює швидкість виконання задачі та підвищує впевненість учня у власних навчальних діях.

Приклад дослідження функції за допомогою похідної зображено на рисунку 1.9:

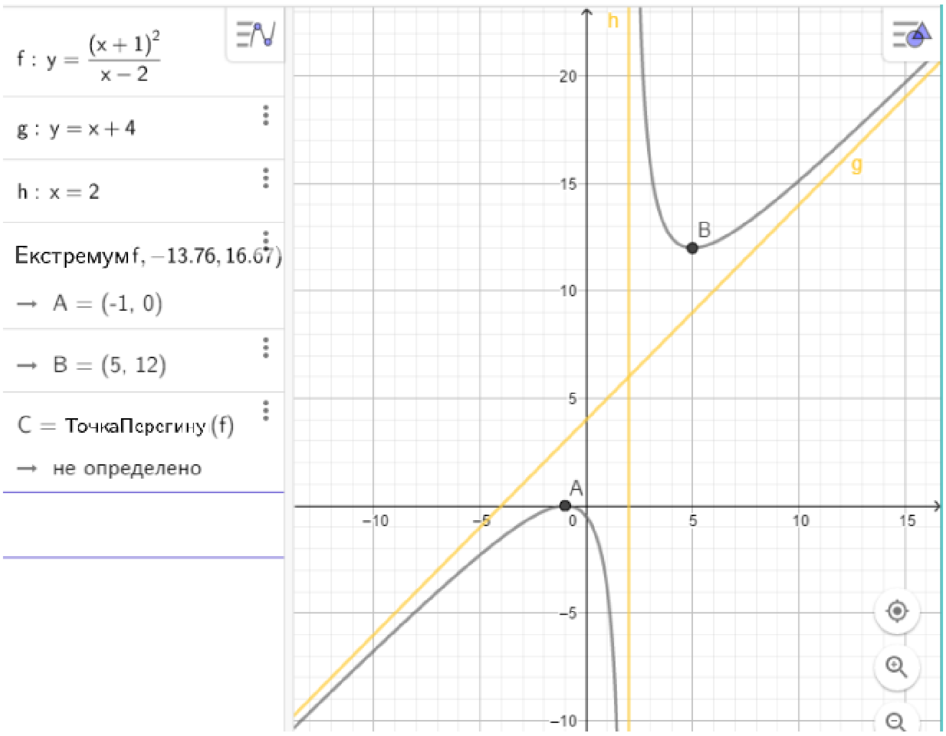


Рисунок 1.9 – Дослідження функції в GeoGebra

Використання GeoGebra, загалом, забезпечує кращу візуалізацію вивчення теми «Похідна та її застосування».

Висновки до розділу 1

Теоретичний аналіз показав, що тема «Похідна та її застосування» на поглибленому (профільному) рівні є одним з ключових етапів формування сучасної математичної компетентності старшокласників. Саме тут відбувається перехід від алгоритмічного обчислення до глибокого розуміння похідної як універсального інструменту дослідження динамічних процесів. Чинна програма та Державний стандарт вимагають від учнів не лише вміння диференціювати функції, а й самостійно досліджувати поведінку функцій, будувати математичні моделі реальних явищ, інтерпретувати результати в прикладному контексті.

Традиційна методика, орієнтована на ручне обчислення, статичну візуалізацію графіків та обмежену кількість прикладів, не забезпечує повноцінного досягнення цих вимог, особливо на творчому та дослідницькому рівнях. Сучасні комп’ютерні технології (зокрема системи комп’ютерної математики типу Mathcad, Mathematica, GeoGebra) усувають ці обмеження, дозволяючи реалізувати динамічну візуалізацію, миттєве варіювання параметрів, автоматизацію обчислень і справжнє математичне експериментування. Інтеграція комп’ютерних технологій є не бажаним доповненням, а необхідною умовою якісного профільного вивчення похідної.

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

2.1. Аналіз чинних підручників та навчальних посібників з алгебри і початків аналізу за темою «Похідна та її застосування»

Навчальні програми з математики для закладів загальної середньої освіти, затверджені Міністерством освіти і науки України, передбачають вивчення курсу алгебри та початків аналізу в 10-11 класах на двох рівнях: стандарту (3-4 години на тиждень) та профільному (6-9 годин на тиждень). Тема «Похідна та її застосування» становить важливий елемент підготовки учнів до застосування математичних методів у дослідженні функцій і моделюванні реальних процесів.

Згідно з чинною програмою для профільного рівня, на тему відводиться 50-56 годин (залежно від розподілу резервного часу). Основна мета – не лише формування алгоритмічних умінь обчислення похідних, а й розвиток здатності учнів використовувати похідну як інструмент аналізу залежностей, оптимізації та математичного моделювання. Програма чітко орієнтована на компетентнісний підхід: передбачено формування математичної, дослідницької, цифрової та підприємницької компетентностей через задачі прикладного характеру та використання ІКТ [11].

На рівні стандарту тема вивчається в значно меншому обсязі – 18-22 години. Акцент зроблено на базових уміннях: обчислення похідних елементарних функцій, складання рівнянь дотичних, елементарне дослідження функцій за схемою. Прикладні задачі та використання другої похідної мінімізовано .

Серед чинних підручників, рекомендованих МОН України на 2025/2026 навчальний рік, проаналізовано такі:

Профільний рівень:

– Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Харків: Гімназія, 2022 (перевидання 2024) [21].

– Афанасьєва О.В., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпкань З.І. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Харків: Сиция, 2023 [22].

– Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Київ: Генеза, 2022 [23].

Рівень стандарту:

– Мерзляк А.Г. та ін. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Рівень стандарту. – Харків: Гімназія, 2023 [24].

– Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Рівень стандарту. – Харків: Ранок, 2023.

Найбільш ґрунтовно тема представлена в підручнику Афанасьєвої та співавторів. Теоретичний матеріал викладено з акцентом на чотири еквівалентні інтерпретації похідної (механічна, геометрична, швидкість зміни, локальна лінійна апроксимація). Особлива увага приділяється візуалізації: майже до кожного параграфа додано QR-коди на інтерактивні GeoGebra- та Desmos-моделі. Задачний матеріал має виражену рівневу диференціацію та значну частку завдань дослідницького характеру [21].

Для прикладу проведено логіко-математичний аналіз системи вправ параграфа «Правила диференціювання. Похідна складеної функції» підручника Афанасьєвої та ін. – таблиця 2.1.

Таблиця 2.1 Логіко-математичний аналіз системи вправ параграфа «Правила диференціювання. Похідна складеної функції»

Види вправ	1 рівень (репродуктивний)	2 рівень (частково-пошуковий)	3 рівень (пошуковий)	4 рівень (творчий)
Вправи для створення мотивації	101, 102	115	–	–
Вправи на актуалізацію опорних знань	103–108	116–120, 125	138, 139	–

Вправи на виділення суттєвих властивостей поняття	–	121, 122, 126	140–143	155
Вправи-ілюстрації до нових правил	109–114	123, 124, 127–130	–	–
Вправи на розпізнавання об’єктів нового класу	–	131–135	144–147	156, 157
Вправи на засвоєння та розуміння нових понять	115–120	136, 137, 148–152	153, 154	158–160

Висновок за таблицею: 48 % завдань належать до 2-4 рівнів складності, що свідчить про виражену дослідницьку спрямованість підручника та можливість формування ключових компетентностей.

Порівняльний аналіз змісту теми на різних рівнях наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 Порівняння змісту теми «Похідна та її застосування» за програмами 2023 року

Змістовий компонент	Рівень стандарту (18–22 год)	Профільний рівень (50–56 год)
Задачі, що приводять до поняття похідної	+ (тільки швидкість і дотична)	+ (чотири типи задач: швидкість, дотична, апроксимація, швидкість зміни)
Похідна оберненої функції	–	+
Таблиця похідних (повна)	+ (основні)	+ (включаючи гіперболічні та обернені тригонометричні в розширенні)
Похідні вищих порядків	–	+ (до четвертого включно)
Достатні ознаки опуклості/увігнутості	–	+
Нерівність Йенсена та її застосування	–	+ (обов’язково)
Застосування похідної до доведення нерівностей і тотожностей	обмежено	розширено (включаючи параметричні)

Прикладні задачі (економіка, фізика, біологія)	3–5 задач	25–30 задач
Рекомендації щодо використання ІКТ	відсутні	обов'язкові (не менше 8 разів у темі)

Значна увага в сучасних програмах приділяється підготовці до мультипредметного тесту НМТ (заміна ЗНО з 2022 року). Витяг з вимог НМТ-2025 до теми «Похідна та її застосування» наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 Вимоги НМТ-2025 до теми «Похідна та її застосування»

Учень повинен знати/розуміти	**Предметні вміння**
означення похідної, її геометричний, механічний та економічний зміст	знаходити похідні елементарних функцій та складених функцій
рівняння дотичної та нормалі	складати рівняння дотичної в точці та використовувати його для наближених обчислень
таблицю похідних та правила диференціювання	знаходити похідні вищих порядків (до 3-го включно)
достатні ознаки монотонності, екстремуму, опуклості	проводити повне дослідження функції та будувати графік
застосування похідної до розв'язування нерівностей	використовувати похідну для доведення нерівностей методом граничного переходу

Чинні підручники та програми демонструють суттєве розширення можливостей для реалізації компетентнісного підходу, особливо на профільному рівні. Найбільш відповідними сучасним вимогам є підручники Афанасьєвої та співавторів (2023) та останнє перевидання Мерзляка (2024), які систематично інтегрують цифрові технології. Водночас підручники рівня стандарту залишаються орієнтованими переважно на репродуктивний рівень діяльності, що обмежує можливості формування дослідницької та цифрової компетентностей.

2.2 Логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування»

Проведемо логіко-математичний аналіз змісту теми «Похідна та її застосування» з позицій реалізації компетентнісного підходу на матеріалі підручника А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра для профільного рівня навчання [21].

Завдання, що приводять до поняття похідної.

Існує кілька дидактично обґрунтованих способів введення поняття похідної у шкільному курсі математики: через прирости функції та аргументу, через попереднє опрацювання понять границі послідовності та границі функції в точці, через фізичну задачу про миттєву швидкість нерівномірного руху матеріальної точки, а також через геометричну задачу про кут нахилу дотичної до кривої. В підручнику А. Г. Мерзляка та співавторів [21] обрано підхід, що розпочинається з введення понять приросту аргументу та відповідного приросту функції з подальшим розглядом їх відношення та граничного переходу. Саме цей шлях буде покладено в основу подальшого аналізу. Нехай задано функцію $y = f(x)$ та довільну фіксована точка x_0, яка належить області визначення цієї функції. Розглядається також інша точка x, що міститься в деякому околі точки x_0. Різниця $x - x_0$ називається приростом аргументу в точці x_0, і позначається Δx, тобто:

$$\Delta x = x - x_0$$

Звідки отримується рівність $x = \Delta x + x_0$. При цьому зазначається, що початкове значення аргументу x_0 отримало приріст Δx. Внаслідок цього значення функції f зміниться на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ця різниця називається приростом функції f в точці x_0, і позначається Δf, отже маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Також зазначається, що для приросту функції $y = f(x)$ прийняте позначення Δy, тобто $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Для візуалізації, учням пропонується рисунок 2.1.

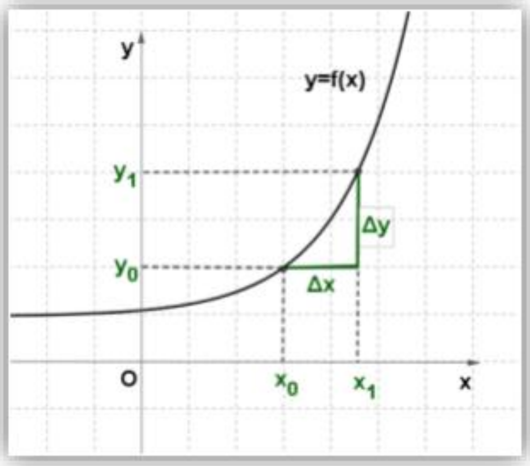


Рисунок 2.1 – Приріст функції

Для закріплення та поглибленого осмислення поняття приросту функції в підручнику запропоновано розв'язування вправ на обчислення приросту значення елементарних функцій за заданого приросту аргументу та фіксованої точки. Найчастіше як приклади використовуються функції $f = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ або функції виду $f(x) = kx + b$.

Перед формальним введенням поняття похідної розглядаються задачі, що природно приводять до нього, зокрема задача про миттєву швидкість нерівномірного прямолінійного руху матеріальної точки та задача про кут нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці. Такі задачі сприяють не лише формуванню математичної компетентності, а й розвитку ключових компетентностей у галузі природничих наук і технологій, оскільки базуються на фізичних поняттях і моделях, що мають міжпредметний характер.

При розв'язуванні задач, які мотивують введення поняття похідної, доцільно дотримуватися чіткого алгоритму, подібного до того, що запропоновано В. В. Корольським для вищих навчальних закладів [22, с. 19], проте адаптованого до вікових особливостей і рівня підготовки школярів. Адаптація полягає в заміні абстрактних об'єктів на конкретні життєві ситуації та використання наочних даних, що полегшує розуміння сутності граничного переходу.

Розглянемо задачу про миттєву швидкість із застосуванням зазначеного алгоритму.

Умова задачі. Автомобіль рухається прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку зі змінною швидкістю. Протягом часу t (тобто на проміжку часу [0;t]) його положення визначається законом $s = s(t)$, який дає змогу знайти координату автомобіля в будь-який момент часу t_0. Потрібно встановити швидкість автомобіля в довільний фіксований момент часу.

Розв’язання.

1) Спочатку задається приріст часу Δt, тобто розглядають проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$.

2) Наступним кроком знаходиться приріст Δs, яку проїде автомобіль за час Δt: $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$

3) Далі знаходиться значення швидкості v_c руху автомобіля протягом часу Δt:

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

4) На останньому кроці обчислюється значення миттєвої швидкості руху, яка відповідає часу $t = t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (t \to t_0)}} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Застосування викладеного алгоритму дає учням можливість самостійно й усвідомлено брати участь у розв’язанні задачі про дотичну до графіка функції в заданій точці, оскільки вони вже володіють готовою схемою обчислення кутового коефіцієнта дотичної. На цьому етапі основним завданням вчителя є чітка постановка задачі, демонстрація графіка довільної функції та візуалізація процесу переходу січної до дотичної [19].

Умова задачі. Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$, графіком якої є крива (рисунок 2.1). Нехай точки M_0 та M належать цій функції, проведемо січну MM_0 та зафіксуємо точку M_0, а точка M, рухаючись по кривій, наближається до точки M_0, при цьому в граничному положенні при наближенні точки M до точки M_0 січна займе положення прямої M_0T.

Пряму M_0T називають дотичною до даної кривої в точці M_0. Потрібно знайти рівняння дотичної M_0T.

Розв’язання.

Для початку вчитель малює графік довільної функції разом з січною та дотичною. Подібний графік міститься на рисунку 2.2.

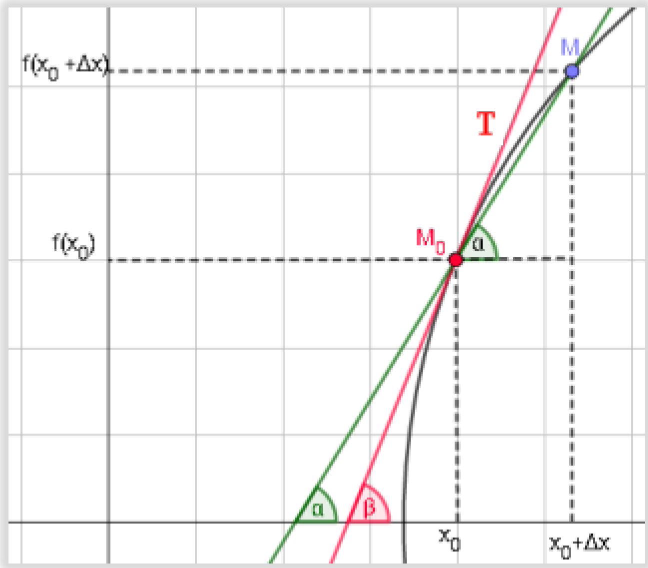


Рисунок 2.2 – Дотична до графіка функції

Далі пояснюється, що дотична M_0T – це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = tg\beta$, де β – кут між прямою і додатнім напрямом вісі OX.

1) Обчислюється приріст Δx аргументу x_0 та одержують значення $x_0 + \Delta x$

2) Наступним кроком знаходиться приріст функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

3) Обчислюється коефіцієнт січної MM_0, який дорівнює $tg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

4) Обчислюється кутовий коефіцієнт дотичної M_0T, який дорівнює $tg\beta$:

$$tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Рівняння дотичної M_0T матиме вигляд $y = f(x_0) + k(x - x_0)$, де $k = tg\beta$.

Після аналізу наведених задач, які різняться за своїм прикладним змістом (фізичним, геометричним тощо), але мають спільну математичну природу, формулюється висновок про існування єдиного абстрактного поняття, що лежить в основі всіх отриманих виразів. Цим поняттям є похідна функції.

В процесі розв’язування задач учитель акцентує увагу учнів на необхідності систематичного використання позначень приросту функції та відношення приросту функції до приросту аргументу, для чого пропонується відповідний комплекс вправ [15].

Поняття похідної. Механічний, геометричний, економічний та біологічний зміст похідної.

Означення. Похідною функції f в заданій точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f в точці x_0 до відповідного приросту аргументу, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції f в заданій точці x_0 позначають за допомогою штриха $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

У підручнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра [21, с. 81] наведено формальну схему обчислення похідної. Водночас чотири кроки алгоритму (1–4), які учні вже опрацювали під час розв’язування мотивуючих задач, фактично є універсальним операційним шаблоном для знаходження похідної і можуть використовуватися безпосередньо.

Після введення означення похідної учні, спираючись на це означення та на вже знайомі кроки 1–4, тренуються обчислювати похідні найпростіших функцій у заданій точці. При цьому підкреслюється, що якщо функція f має похідну в точці x_0, то її називають диференційованою в цій точці, а з диференційованості автоматично випливає неперервність функції в цій точці.

З метою формування предметної математичної компетентності та глибшого осмислення сутності поняття разом з учнями узагальнюються геометричний і механічний зміст похідної на основі раніше розв'язаних задач. Отримані висновки фіксуються у вигляді таблиці (табл. 2.4).

Таблиця 2.4 – Зміст похідної

Механічний зміст похідної $s(t)$ – закон руху матеріальної точки $v(t)$ – миттєва швидкість $s'(t_0) = v(t_0)$	Миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює похідній функції, що визначає закон руху матеріальної точки по координатній прямій у точці t_0.
Геометричний зміст похідної $f'(x_0) = k(x_0) = tg\beta$, де f – дана функція $\angle\beta$– кут нахилу дотичної до графіка f k – кутовий коефіцієнт дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної до графіка функції f в точці x_0	Похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці. (Кут відлічують від додатного напрямку осі OX проти годинникової стрілки.)

Після того, як був розглянутий спосіб знаходження похідної за допомогою означення, починають вивчати таблицю похідних (таблиця 2.5). З метою формування дослідницької компетентності перед учнями ставлять задачу – вивести похідні зазначених функцій.

Таблиця 2.5 – Таблиця похідних

№	Дана функція	Похідна даної функції
1	$c, c - const$	0
2	x	1
3	x^2	$2x$
4	$x^n, n \in R$	nx^{n-1}
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила обчислення похідних

Правила, за якими прийнято обчислювати похідні суми (різниці), добутку або частки функцій у підручнику [21] сформульовані у наступних теоремах.

Теорема 1. Похідна суми дорівнює сумі похідних, тобто $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

Теорема 2. Похідна добутку дорівнює $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Наслідок з теореми про похідну добутку функцій. В тих точках, де є диференційованою функція $y = f(x)$, також є диференційованою функція $y = kf(x)$, де k – деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність $(kf(x))' = kf'(x)$.

Теорема 3. Похідна частки двох функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є обчислюється за формулою при $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Диференціюючи функції, учні обов’язково зіткнуться зі складеними функціями виду $h(x)=f(g(x))$, для таких випадків існує наступна теорема.

Теорема 4. Якщо функція $t=g(x)$ диференційована в точці x_0, а функція $y=f(x)$ диференційована в точці t_0, де $t_0=g(x_0)$, то складена функція $h(x)=f(g(x))$ є диференційованою в точці x_0, причому $h'(x_0)=f'(t_0)\cdot g'(x_0)$.

Після теореми 4, з метою формування дослідницької компетентності засобами розвитку дедуктивного методу, перед учнями ставлять питання про зв’язок між похідними взаємно обернених функцій та встановлюють його за допомогою наступної теореми.

Теорема 5 [про похідну оберненої функції]. Нехай оборотна функція $y=f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x=g(y)$ є неперервною в точці y_0, де $y_0=f(x_0)$. Тоді функція g диференційована в точці y_0 і $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій, як правило, виносять за межі обов’язкової програми й розглядають на заняттях математичних гуртків чи факультативів з метою розвитку дослідницької компетентності учнів. Проте за наявності достатнього резерву часу ці доведення доцільно включати й до основного уроку, що сприяє глибшому розумінню природи диференціювання.

Значну увагу вчителі приділяють опрацюванню правил обчислення похідних та їх практичному застосуванню. Як зазначає О. І. Вишенський, саме під час виконання практичних вправ активно задіяні механізми синтезу й аналізу, узагальнення та трансформації, пошуку аналогій, оцінки фактів і роботи уяви [18, с. 126]. Таким чином, систематичне розв’язування диференціальних вправ забезпечує формування всіх ключових компонентів математичної компетентності, включно з дослідницькою складовою.

Основні теореми диференціального числення.

Теорема 6 (Ролля). Нехай функція $f:[a,b]\to R$ задовольняє умовам:

1) $f \in C[a,b]$;

2) $\forall x \in (a,b), \exists f'(x)$;

3) $f(a) = f(b)$.

Тоді $\exists C \in (a,b): f'(C) = 0$.

Дана теорема також має геометричну інтерпретацію. Якщо кожна із умов 1)-3) виконана, тоді на (a,b) існує деяка точка C, де дотична паралельна Ox [5].

Теорема 7. (Лагранжа). Нехай існує така $f:[a,b] \to R$ для якої справедливо:

1) $f \in C[a,b]$;

2) $\forall x \in (a,b), \exists f'(x)$.

Тоді $\exists C \in (a,b): f(b) - f(a) = f'(C)(b-a)$.

Відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ в точності представляє собою тангенс кута нахилу до Ox січною, через точки $(a, f(a)),(b, f(b))$. Дана теорема, як і попередня, може бути інтерпретована геометрично [5].

Теорема 8. (Коші). Нехай функції $f:[a,b] \to R$, $g:[a,b] \to R$, задовольняють умовам [5]:

1) $f, g \in C[a,b]$;

2) $\forall x \in (a,b), \exists f'(x), g'(x)$;

3) $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$.

Тоді, $\exists C \in (a,b): \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(C)}{g'(C)}$

Застосування похідної до дослідження функції

В шкільному курсі алгебри та початків аналізу на поглибленому рівні за допомогою похідної, функції досліджують на:

1) Монотонність (зростання і спадання).

2) Точки екстремуму і екстремуми функції.

3) Досягнення найбільших і найменших значень на відрізку.

4) Опуклість.

Пояснення ознак зростання, спадання та сталості функцій розпочинають з ілюстрацій графіків відомих учням функцій, таких як парабола, гіпербола, пряма, паралельна вісі Ox. Якщо розглядають графік функції $y = x^2$, то показують, що на проміжку $x \in (0;\infty)$, де, як відомо, функція зростає, дотична до графіка в будь якій точці утворює гострий кут з додатнім напрямом вісі Ox, тобто похідна у цих точках додатна, аналогічно показують, що на проміжку $x \in (-\infty;0)$ похідна від'ємна. У випадку розгляду прямої, паралельної вісі Ox, яка задається функцією виду $y = b$, отримують, що похідна в будь-якій точці буде дорівнювати нулю. Дані спостереження підтверджують наступними теоремами.

Теорема 9. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Теорема 10. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Теорема 11. Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) = 0$, то функція f константна на цьому проміжку.

Існують інші методичні підходи введення достатніх умов монотонності функцій. Наприклад, в підручнику М. І. Башмакова учнів підводять до теорем 9-11 за допомогою механічного змісту похідної, даний метод використовується і в підручнику А. Г. Мерзляка та інших [21, с. 133], але тільки для виведення ознаки сталості функції.

Теорема 12. Якщо диференційована на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Дослідження функцій на монотонність є алгоритмічною вправою, тому зазвичай виокремлюють кроки дослідження на прикладі декількох функцій. Подібний алгоритм виклала у своєму посібнику З. І. Слєпкань [15, с. 413].

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) Знайти область визначення функції та точки розриву.

2) Знайти похідну.

3) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції.

4) Записати і розв'язати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множин її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції.

При вивченні понять екстремуму функції та точок екстремуму особливу увагу приділяють розрізненню цих термінів: точки максимуму й мінімуму належать до точок екстремуму, тоді як значення функції в цих точках є власне максимумами або мінімумами. Досвід свідчить, що учні часто змішують ці поняття, що призводить до типових помилок.

Перед формальним введенням означень точок максимуму й мінімуму розглядається поняття околу точки.

Означення. Інтервал (a, b), який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Далі подаються означення точок максимуму та мінімуму функції з відповідною графічною ілюстрацією. Зв'язок між похідною та точками екстремуму встановлює така теорема.

Теорема 13. Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційованою в точці x_0.

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає логічне запитання: чи кожна внутрішня точка області визначення функції, в якій похідна дорівнює нулю або не існує, є точкою екстремуму? За допомогою контрприкладів демонструється, що рівність похідної нулю чи недиференційовність функції в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.

З урахуванням цього означення робиться висновок, що пошук точок екстремуму слід проводити саме серед критичних точок.

Подальший аналіз присвячується теоремам, які формулюють достатні умови екстремуму та визначають алгоритм використання першої й другої похідних для встановлення характеру критичних точок.

Теорема 14. Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a;x_0)$ і $(x_0;b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x\in(a;x_0)$ виконується нерівність $f'(x)>0$, а для всіх $x\in(x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x)<0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема 15. Нехай функція f є диференційованою на кожному з проміжків $(a;x_0)$ і $(x_0;b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x\in(a;x_0)$ виконується нерівність $f'(x)<0$, а для всіх $x\in(x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x)>0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

При переході до знаходження максимуму і мінімуму функції звертають увагу на те, що екстремуми характеризують поведінку функції в деякому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на її частині.

На цьому етапі, після вивчення необхідних і достатніх умов існування точок екстремуму, вводять алгоритм дослідження функцій на екстремум.

1) Знайти область визначення функції $f(x)$.

2) Знайти похідну даної функції $f'(x)$ та визначити критичні точки.

3) Розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання та дослідити знак похідної в околах цих точок, зробити висновки щодо точок максимуму і мінімуму.

4) Обчислити максимуми та мінімуму функції, підставивши у формулу $y=f(x)$ значення точок максимуму і мінімуму.

Для функції f неперервної на відрізку $[a;b]$ пошук найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку проводять, користуючись такою схемою.

1) Знайти похідну функції $f(x)$.

2) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать відрізку $[a;b]$.

3) Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.

4) З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Неперервна на замкнутому відрізку функція обов'язково досягає на ньому найбільшого та найменшого значень, причому ці екстремуми можуть реалізовуватися або в стаціонарних точках (де перша похідна дорівнює нулю), або на кінцях відрізка. З огляду на це достатні умови екстремуму в стаціонарних точках окремо не перевіряються; пошук глобальних екстремумів зводиться до порівняння значень функції в критичних точках та на межах відрізка. Позначають екстремуми на відрізку наступним чином: $\min\limits_{[a;b]} f(x), \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Учням наголошують, що знання про екстремуми функції дають змогу розв'язувати прикладні задачі оптимізації, наближені до реальних життєвих ситуацій. В підручнику [21, с. 158] наведено приклади таких задач: визначення обсягу виробництва, що забезпечує максимальний прибуток підприємства; мінімізація часу виконання виробничого завдання за обмежених ресурсів; оптимізація маршруту доставки товару з метою зменшення витрат палива. Ці задачі не лише підвищують мотивацію до вивчення теми та сприяють узагальненню теоретичних знань, а й формують математичну компетентність, а також розвивають наскрізні лінії ключових компетентностей, зокрема «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Підприємливість та фінансова грамотність».

Перед переходом до поняття опуклості графіка функції учні опановують обчислення другої похідної. Для мотивації цього кроку розглядається задача про прискорення матеріальної точки, що дає змогу інтерпретувати другу похідну як швидкість зміни швидкості.

Задача. Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Учням вже відомо, що миттєва швидкість $v(t)$ в момент часу t визначається за формулою $s'(t) = v(t)$, тоді розглянемо функцію $y = v(t)$, її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають $a(t)$, тобто $v'(t)=a(t)$.

Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкості руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто:

$$a(t)=v'(t)=(s'(t))'.$$

В таких випадках говорять, що функція прискорення руху є другою похідною функції $y=s(t)$. Пишуть: $a(t)=s''(t)$.

На наступному етапі розглядаються графічні приклади функцій, опуклих угору та опуклих униз на певних інтервалах, що дає учням змогу сформувати відповідне наочне уявлення. Функцію називають опуклою вгору (вгнутою) на проміжку, якщо її графік на цьому проміжку розташовано не вище за будь-яку дотичну, проведену до нього. Натомість функція є опуклою вниз (випуклою) на проміжку, якщо графік лежить не нижче за кожну свою дотичну.

Окремо аналізуються приклади графіків, на яких наявна точка x_0, з властивістю, що при переході через неї графік функції змінює сторону відносно дотичної (переходить з одного боку дотичної на інший). Таку точку називають точкою перегину графіка функції [21].

Зв'язок між похідною та визначенням опуклості функції встановлюють наступні теореми.

Теорема 16. Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x)>0$, то функція $f(x)$ є опуклою вниз на даному проміжку.

Теорема 17. Якщо для всіх x з деякого проміжка функції $f(x)$ виконується нерівність $f''(x)<0$, то функція $f(x)$ є опуклою вгору на даному проміжку.

Теорема 18. Якщо x_0, є точкою перегину функції $f(x)$ і в цій точці функція двічі диференційована, то $f''(x)=0$.

Теорема 18 є необхідною, але не достатньою умовою для існування точки перегину. Точка x_0 буде точкою перегину однозначно, якщо функція $f(x)$ при переході через цю точку змінює знак на протилежний.

Для учнів також вводять алгоритм знаходження точок перегину [21].

1) Знайти область визначення та інтервали на яких функція неперервна.

2) Визначити другу похідну функції.

3) Знайти внутрішні точки області визначення, в яких друга похідна дорівнює нулю.

4) Нанести знайдені точки на координатну пряму і знайти знак другої похідної та характер поведінки функції на кожному інтервалі.

5) Зробити висновки користуючись теоремами 16-18. Для поглиблення знань учнів про опуклість функції вводять наступну теорему.

Теорема 19. Якщо функція f опукла вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ця теорема має геометричну інтерпретацію, яку описує рисунок 2.3. З даного рисунка видно, що дотична проведена до графіка функції f в точці M. Оскільки функція f опукла вгору, то точка A лежить не нижче від точки A_1, а точка B – не нижче від точки B_1. Тому середина відрізка AB (точка M) лежить не нижче від середини відрізка A_1B_1 (точка M_1). Це означає, що ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1.

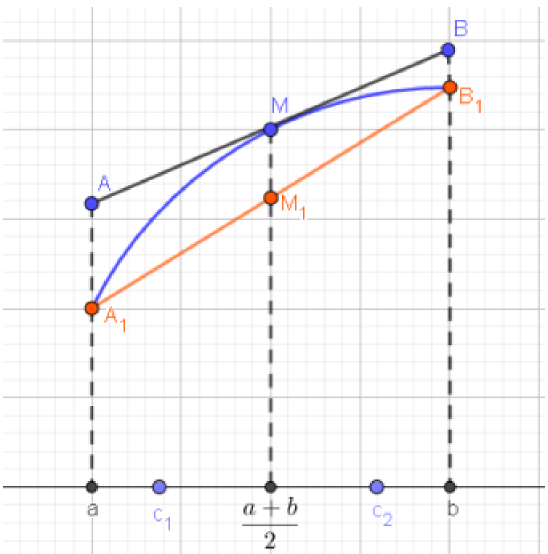


Рисунок 2.3 – Геометрична інтерпретація нерівності Єнсена

Теорема 19 має узагальнення, яке висвітлено у наступній теоремі.

Теорема 20. Якщо функція f опукла вгору на проміжку I то для будь-яких $x_1, x_2, ..., x_n$ з проміжку I виконується нерівність:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{2}$$

Дану нерівність називають нерівністю Єнсена для опуклої вгору функції. Для опуклої вниз функції f знак нерівності змінюється на протилежний, тобто для будь-яких $x_1, x_2, ..., x_n$ з проміжку I виконується нерівність [1]:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{2}$$

Після розгляду даних властивостей переходять до задачі, яка потребує всіх знань, умінь і навичок, що учень отримав вивчаючи похідну – до побудови графіка функції.

Учням пояснюють, що існують функції, графіки яких є невідомими, але їх можна побудувати дослідивши ці функції.

Дослідження функції за допомогою похідної виконують за алгоритмом:

1) Знайти область визначення функції.

2) Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.

3) Знайти точки перетину з осями координат.

4) Знайти проміжки зростання і спадання.

5) Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.

6) Знайти проміжки опуклості функції і точки перегину.

7) Побудувати графік функції використовуючи результати досліджень.

2.3. Методичні особливості використання комп'ютерних технологій при вивченні похідної

Використання комп'ютерних технологій в процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні навчання алгебри та початків аналізу є потужним засобом реалізації компетентнісного підходу, що забезпечує перехід від формального засвоєння алгоритмів диференціювання до глибокого розуміння похідної як інструменту аналізу динамічних процесів та моделювання реальних явищ. Серед численних програмних засобів особливе місце посідає система MathCad, яка поєднує символічні обчислення, числові методи, графічну візуалізацію та можливості документування всього ходу розв'язання в єдиному інтерактивному документі. MathCad дозволяє учням не лише швидко обчислювати похідні будь-якої складності, а й зберігати логіку міркувань, перевіряти гіпотези, будувати графіки функцій та їх похідних, а також оформлювати результати у вигляді готового звіту, що ідеально відповідає вимогам формування предметної математичної та дослідницької компетентностей.

MathCad вирізняється інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, який дає змогу вводити математичні вирази у звичному «паперовому» вигляді, без необхідності вивчення складного синтаксису програмування. Вже на етапі мотивації та введення поняття похідної вчитель може продемонструвати документ, в якому задана функція (наприклад, закон руху матеріальної точки $s(t)=t^3-6t^2+9t$), автоматично обчислюється її похідна $v(t)=s'(t)$, а далі – прискорення $a(t)=v'(t)$ (рис. 2.4) [8]

$$s(t) := t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) := \frac{d}{dt}s(t) \qquad v(t) \rightarrow 3\cdot t^2 - 12\cdot t + 9$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2}s(t) \qquad a(t) \rightarrow 6\cdot t - 12$$

Рисунок 2.4 – Обчислення похідних першого та другого порядку від функції шляху

Для візуалізації в MathCad можна побудувати графіки функцій швидкостей, шляху та прискорення (рис. 2.5)

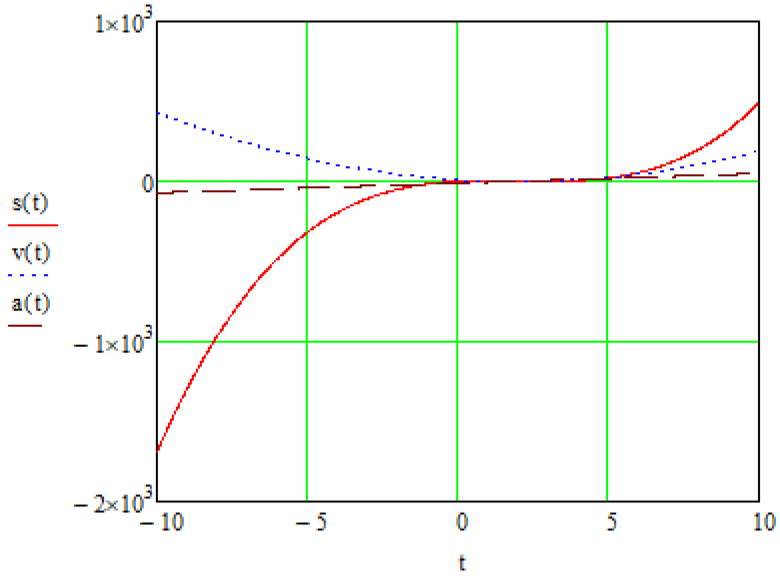


Рисунок 2.5 – Графіки функцій шляху, швидкості та прискорення

Важливою особливістю MathCad є те, що якщо змінити функцію шляху на іншу, то в автоматичному режимі будуть перераховані похідні першого та другого порядку, відповідно, і графіки також зміняться в автоматичному режимі.

Учень одразу бачить символічний вираз похідної, її числові значення в таблиці, графік швидкості та прискорення, а також анімацію руху точки з вектором швидкості. Така інтеграція аналітичного, числового та графічного представлення інформації формує в учнів цілісне уявлення про механічний зміст похідної як миттєвої швидкості, що значно перевищує можливості статичних малюнків в підручнику.

На етапі формування алгоритмічних умінь обчислення похідних MathCad забезпечує миттєву верифікацію результатів та автоматичне спрощення виразів. Учень вводить функцію, позначає оператор диференціювання (стрілка → d/dx), і система не лише обчислює похідну, а й виводить її в спрощеному вигляді, виділяючи можливі помилки в ручних обчисленнях. Це особливо цінно для складених, обернених, параметрично заданих функцій та логарифмічного диференціювання, де ручні розрахунки часто призводять до громіздких виразів.

Наведемо декілька прикладів обчислення похідних більш складних функцій (рис. 2.6)

$$\frac{d}{dx}(\ln(\cos(5x))) \to -\frac{5\cdot\sin(5\cdot x)}{\cos(5\cdot x)} \text{ simplify } \to -5\cdot\tan(5\cdot x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x}\left(\cos\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right] \to \cos\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot e^{x} + \frac{\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot e^{x}}{x} \text{ simplify } \to \frac{e^{x}\cdot\left(\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x\cdot\cos\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)^{\cos(x)}\right) \to \cos(x)^{2}\cdot\sin(x)^{\cos(x)-1} - \sin(x)\cdot\sin(x)^{\cos(x)}\cdot\ln(\sin(x))$$

Рисунок 2.6 – Приклади обчислення похідних складених функцій

В документі MathCad учень може розмістити поруч ручний розв’язок і результат програми, порівняти їх і зробити висновок про правильність, що розвиває навички самоперевірки та рефлексії – ключові елементи дослідницької компетентності [8].

Особливо ефективним є використання MathCad при дослідженні функцій за допомогою першої та другої похідних. Учень створює єдиний робочий аркуш, де задає функцію, обчислює $f'(x)$ і $f''(x)$, будує таблицю значень похідних на заданому інтервалі, автоматично визначає критичні точки та точки можливого перегину за допомогою логічного блоку Given-Find, або за допомогою вбудованої функції root, а потім будує графіки з кольоровим зафарбуванням інтервалів монотонності та опуклості. Приклад використання функції solve для знаходження критичних точок (рис. 2.7).

$f(x) := x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 68x + 30$ $\qquad x := 0..5$

$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$x := 0$

Given

$f'(x) = 0$

$Crit := Find(x)$

$Crit = 1.054$

f(x) =	f'(x) =
30	-68
0	-2
10	16
24	10
30	4
40	22

$g(x) := x^3 - 14x^2 + 45x - 29$

$g''(x) := \frac{d^2}{dx^2}g(x)$

$x := 0$

Given

$g''(x) = 0$

Перегин := Find(x)

Перегин = 4.667

Рисунок 2.7 – Знаходження критичних точок та точок перегину

Система дозволяє легко змінювати параметри функції (наприклад, коефіцієнти многочлена) та миттєво спостерігати зміну кількості екстремумів чи точок перегину. Такий інтерактивний експеримент перетворює схему повного дослідження функції на справжнє міні-дослідження, під час якого учень самостійно формулює гіпотези («якщо збільшити коефіцієнт при x^3, то з'явиться дві точки перегину»), перевіряє їх та робить узагальнення, зберігаючи весь процес в документі для подальшого аналізу чи презентації [8].

Прикладний блок теми набуває нової якості завдяки можливостям MathCad у числовому та символічному моделюванні. Оптимізаційні задачі (максимальний об'єм циліндра, мінімальна витрата матеріалу, граничні витрати в економіці) розв'язуються за допомогою вбудованих функцій Maximize/Minimize або solve, з автоматичною побудовою графіка функції витрат/прибутку та виділенням точки оптимуму. Учень може змінювати обмеження (наприклад, фіксовану площу поверхні) і бачити, як змінюється оптимальне рішення, що формує підприємницьку компетентність і розуміння практичної цінності похідної.

Важливою методичною перевагою MathCad є можливість документування всього ходу дослідження в одному файлі, який учень може зберегти, надіслати вчителю чи презентувати класу. Документ містить формули, графіки, таблиці, текстові коментарі та висновки, що відповідає сучасним вимогам до оформлення наукових звітів та розвиває навички презентації результатів. Для індивідуалізації навчання вчитель готує шаблони документів різного рівня складності: для слабших учнів – з готовими формулами та запитаннями для заповнення; для сильніших – з відкритими завданнями на створення власної моделі (наприклад, «моделювання граничної продуктивності праці залежно від кількості працівників»). Такий диференційований підхід забезпечує залучення кожного учня відповідно до його зони найближчого розвитку.

Організаційно робота з MathCad інтегрується в урок таким чином [16]:

1) на початку теми вчитель демонструє готовий документ для мотивації; на етапах формування умінь учні працюють парами за комп'ютером, порівнюючи аналітичні обчислення з результатами програми;

2) під час дослідження функцій та прикладних задач – самостійна робота з шаблонами; наприкінці теми – захист міні-проєктів в форматі MathCad-документу.

Для дистанційного навчання файли розміщуються в Google Classroom або OneDrive з можливістю спільного редагування.

2.4. Розробка комплексу завдань з використання комп'ютерних технологій при вивченні похідної

В рамках дослідження розроблено комплекс дидактичних матеріалів, який різного рівня складності (репродуктивний, продуктивний, творчий, дослідницький), спеціально підібраних та адаптованих для обов'язкового розв'язування в системі Mathcad 15. Всі завдання відповідають програмі профільного рівня 11 класу (2023–2025 рр.) та орієнтовані на формування математичної, дослідницької та цифрової компетентностей.

Рівень 1. Репродуктивний (базове диференціювання)

Обчисліть похідні наступних функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{\ln(7x-3)}{3tg^2 4x}$

2) $y=\sqrt[5]{x^6+ctg\sqrt[3]{5}}-\dfrac{\arcsin^3 4x}{sh(3x+1)}$

3) $y=3^{\sin x} arctg^3 4x+\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$

4) $y=\log_3 x\cdot\arccos 3x-\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{2x^2-3x}}$

5) $y=sh^3 x\cdot arcctg 5x^2+(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}$

6) $y=(\sin 7x)^{arcctg(x+1)}-\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}$

Знаходимо аналітичний розв'язок та перевіряємо відповідь в MathCad

1)

$$y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{4}{x^5}+\frac{\ln(7x-3)}{3tg^2 4x}$$

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^7}\right)+\left(\frac{4}{x^5}\right)'+\left(\frac{\ln(7x-3)}{3tg^2 4x}\right)'=\left(x^{\frac{7}{3}}\right)'+\left(4x^{-5}\right)+$$

$$+\frac{(\ln(7x-3))'\cdot 3tg^2 4x-\ln(7x-3)\cdot\left(3tg^2 4x\right)}{9tg^4 4x}=$$

$$=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-20x^{-6}+\frac{\frac{3tg^2 4x}{7x-3}\cdot(7x-3)'-\ln(7x-3)\cdot 6tg4x\cdot(tg4x)'}{9tg^4 4x}=$$

$$=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-20x^{-6}+\frac{\frac{21tg^2 4x}{7x-3}-\frac{\ln(7x-3)\cdot 6tg4x}{\cos^2 4x}\cdot(4x)'}{9tg^4 4x}=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-20x^{-6}+$$

$$+\frac{\frac{21tg^2 4x}{7x-3}-\frac{24\ln(7x-3)\cdot tg4x}{\cos^2 4x}}{9tg^4 4x}$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{x^7}+\frac{4}{x^5}+\frac{\ln(7x-3)}{3\cdot(\tan(4x))^2}\right]\to\frac{7}{3\cdot\tan(4\cdot x)^2\cdot(7\cdot x-3)}+\frac{7\cdot\sqrt[3]{x^7}}{3\cdot x}-\frac{20}{x^6}-\frac{2\cdot\ln(7\cdot x-3)\cdot\left(4\cdot\tan(4\cdot x)^2+4\right)}{3\cdot\tan(4\cdot x)^3}$$

2)

$$y=\sqrt[5]{x^6+ctg\sqrt[3]{5}}-\frac{\arcsin^3 4x}{sh(3x+1)}$$

$$y'=\left(\sqrt[5]{x^6+ctg\sqrt[3]{5}}\right)-\frac{\left(\arcsin^3 4x\right)'(sh(3x+1))-\left(\arcsin^3 4x\right)(sh(3x+1))'}{sh^2(3x+1)}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^6+ctg\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{4}{5}}\left(x^6+ctg\sqrt[3]{5}\right)-$$

$$-\frac{3\arcsin^2 4x(\arcsin 4x)'(sh(3x+1))-\left(\arcsin^3 4x\right)ch(3x+1)\cdot(3x+1)'}{sh^2(3x+1)}=$$

$$=\frac{6}{5}x^5\left(x^6+ctg\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{4}{5}}-\frac{\frac{3\arcsin^2 4x\cdot sh(3x+1)}{\sqrt{1-16x^2}}(4x)'-3\arcsin^3 4x\cdot ch(3x+1)}{sh^2(3x+1)}=$$

$$=\frac{6}{5}x^5\left(x^6+ctg\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{4}{5}}-\frac{\dfrac{12\arcsin^2 4x\cdot sh(3x+1)}{\sqrt{1-16x^2}}-3\arcsin^3 4x\cdot ch(3x+1)}{sh^2(3x+1)}$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[5]{\left(x^6-\cot\left(\sqrt[3]{5}\right)\right)}+\frac{-(\operatorname{asin}(4x))^3}{\sinh(3x+1)}\right]\rightarrow\frac{3\cdot\cosh(3\cdot x+1)\cdot\operatorname{asin}(4\cdot x)^3}{\sinh(3\cdot x+1)^2}-\frac{6\cdot x^5\cdot\sqrt[5]{x^6-\cot\left(5^{\frac{1}{3}}\right)}}{5\cdot\left(\cot\left(5^{\frac{1}{3}}\right)-x^6\right)}-\frac{12\cdot\operatorname{asin}(4\cdot x)^2}{\sinh(3\cdot x+1)\cdot\sqrt{1-16\cdot x^2}}$$

3)

$$y=3^{\sin x}arctg^3 4x+\frac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$$

$$y'=\left(3^{\sin x}\right)'arctg^3 4x+3^{\sin x}\cdot\left(arctg^3 4x\right)'+$$

$$+\frac{(\arcsin(3x+8))'\left((x-7)^3\right)-(\arcsin(3x+8))\left((x-7)^3\right)'}{(x-7)^6}=3^{\sin x}\ln 3\cdot(\sin x)'\cdot arctg^3 4x+$$

$$+3^{\sin x}\cdot 3arctg^2 4x\cdot(arctg 4x)'+$$

$$+\frac{\dfrac{(3x+8)'\left((x-7)^3\right)}{\sqrt{1-(3x+8)^2}}-3(x-7)^2(\arcsin(3x+8))(x-7)'}{(x-7)^6}=$$

$$=3^{\sin x}\ln 3\cdot\cos x\cdot arctg^3 4x+\frac{3^{\sin x}\cdot 3arctg^2 4x}{1+16x^2}+$$

$$+\frac{\dfrac{3(x-7)^3}{\sqrt{1-(3x+8)^2}}-3(x-7)^2(\arcsin(3x+8))}{(x-7)^6}$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left[3^{\sin(x)}\cdot(\operatorname{atan}(4x))^2+\frac{\operatorname{asin}(3x+8)}{(x-7)^3}\right]\rightarrow\frac{3}{(x-7)^3\cdot\sqrt{1-(3\cdot x+8)^2}}-\frac{3\cdot\operatorname{asin}(3\cdot x+8)}{(x-7)^4}+\frac{8\cdot 3^{\sin(x)}\cdot\operatorname{atan}(4\cdot x)}{16\cdot x^2+1}+3^{\sin(x)}\cdot\ln(3)\cdot\operatorname{atan}(4\cdot x)^2\cdot\cos(x)$$

4)

$$y=\log_3 x\cdot\arccos 3x-\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{2x^2-3x}}$$

$$y'=(\log_3 x)'\cdot\arccos 3x+\log_3 x\cdot(\arccos 3x)'-\frac{\left(e^{2x}\right)'\sqrt[3]{2x^2-3x}-e^{2x}\left(\sqrt[3]{2x^2-3x}\right)'}{\sqrt[3]{\left(2x^2-3x\right)^2}}=$$

$$=\frac{\arccos 3x}{x\ln 3}-\frac{\log_3 x\cdot(3x)'}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{e^{2x}(2x)'\sqrt[3]{2x^2-3x}-\frac{1}{3}\left(2x^2-3x\right)^{-\frac{2}{3}}e^{2x}\left(2x^2-3x\right)'}{\sqrt[3]{\left(2x^2-3x\right)^2}}=$$

$$=\frac{\arccos 3x}{x\ln 3}-\frac{3\log_3 x}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{2e^{2x}\sqrt[3]{2x^2-3x}-\frac{1}{3}\left(2x^2-3x\right)^{-\frac{2}{3}}e^{2x}(4x-3)}{\sqrt[3]{\left(2x^2-3x\right)^2}}$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left(\log(x,3)\cdot \operatorname{acos}(3x)-\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{2x^2-3x}}\right)\to\frac{\operatorname{acos}(3\cdot x)}{x\cdot\ln(3)}-\frac{3\cdot\ln(x)}{\ln(3)\cdot\sqrt{1-9\cdot x^2}}-\frac{2\cdot e^{2\cdot x}}{\sqrt[3]{2\cdot x^2-3\cdot x}}-\frac{e^{2\cdot x}\cdot(4\cdot x-3)}{3\cdot\left(3\cdot x-2\cdot x^2\right)\cdot\sqrt[3]{2\cdot x^2-3\cdot x}}$$

5)

$$y=sh^3x\cdot arcctg5x^2+(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}$$

$$y_1=sh^3x\cdot arcctg5x^2;\, y_2=(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}$$

$$y'=(y_1)'+(y_2)'$$

$$y_1'=\left(sh^3x\right)'\cdot arcctg5x^2+sh^3x\cdot\left(arcctg5x^2\right)'=3sh^2x\cdot(shx)'\cdot arcctg5x^2-\frac{sh^3x\cdot\left(5x^2\right)'}{1+25x^4}=$$

$$=3sh^2x\cdot chx\cdot arcctg5x^2-\frac{10x\cdot sh^3x}{1+25x^4}$$

$$y_2=(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}$$

$$\ln y_2=\ln(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}$$

$$\ln y_2=\sin\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)$$

$$(\ln y_2)'=\left(\sin\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)\right)'$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=\left(\sin\sqrt{x}\right)'\ln(\ln x)+\sin\sqrt{x}\cdot(\ln(\ln x))'$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=\cos\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)'\ln(\ln x)+\frac{\sin\sqrt{x}}{\ln x}\cdot(\ln x)'$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=\frac{\cos\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sin\sqrt{x}}{x\ln x}$$

$$y_2'=y_2\left(\frac{\cos\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sin\sqrt{x}}{x\ln x}\right)=(\ln x)^{\sin\sqrt{x}}\left(\frac{\cos\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sin\sqrt{x}}{x\ln x}\right)$$

$$y' = 3sh^2x \cdot chx \cdot arcctg5x^2 - \frac{10x \cdot sh^3x}{1+25x^4} + (\ln x)^{\sin\sqrt{x}}\left(\frac{\cos\sqrt{x}\cdot\ln(\ln x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sin\sqrt{x}}{x\ln x}\right)$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left[(\sinh(x))^3 \cdot \operatorname{acot}(5x^2) + (\ln(x))^{\sin(\sqrt{x})}\right] \rightarrow \frac{\sin(\sqrt{x})\cdot\ln(x)^{\sin(\sqrt{x})-1}}{x} - \frac{10\cdot x\cdot\sinh(x)^3}{25\cdot x^4+1} + 3\cdot\operatorname{acot}(5\cdot x^2)\cdot\cosh(x)\cdot\sinh(x)^2 + \frac{\cos(\sqrt{x})\cdot\ln(x)^{\sin(\sqrt{x})}\cdot\ln(\ln(x))}{2\cdot\sqrt{x}}$$

6)

$$y = (\sin 7x)^{arcctg(x+1)} - \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}$$

$$y_1 = (\sin 7x)^{arcctg(x+1)}$$

$$\ln y_1 = \ln(\sin 7x)^{arcctg(x+1)}$$

$$\ln y_1 = arcctg(x+1)\cdot\ln(\sin 7x)$$

$$(\ln y_1)' = (arcctg(x+1)\cdot\ln(\sin 7x))'$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = (arcctg(x+1))'\cdot\ln(\sin 7x) + arcctg(x+1)\cdot(\ln(\sin 7x))'$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = -\frac{\ln(\sin 7x)\cdot(x+1)'}{1+(x+1)^2} + \frac{arcctg(x+1)}{\sin 7x}\cdot(\sin 7x)'$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = -\frac{\ln(\sin 7x)}{1+(x+1)^2} + \frac{\cos 7x\cdot arcctg(x+1)}{\sin 7x}\cdot(7x)'$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = -\frac{\ln(\sin 7x)}{1+(x+1)^2} + 7arcctg(x+1)\cdot ctg(7x)$$

$$y_1' = y_1\left(7arcctg(x+1)\cdot ctg(7x) - \frac{\ln(\sin 7x)}{1+(x+1)^2}\right) =$$

$$= (\sin 7x)^{arcctg(x+1)}\left(7arcctg(x+1)\cdot ctg(7x) - \frac{\ln(\sin 7x)}{1+(x+1)^2}\right)$$

$$y_2 = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y_2 = \ln\frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y_2 = \ln(x-7)^{10}\sqrt{3x-1} - \ln(x+1)^2(x+3)^5$$

$$\ln y_2 = \ln(x-7)^{10} + \ln\sqrt{3x-1} - \ln(x+1)^2 - \ln(x+3)^5$$

$$\ln y_2 = 10\ln(x-7) + \frac{1}{2}\ln(3x-1) - 2\ln(x+1) - 5\ln(x+3)$$

$$(\ln y_2)' = \left(10\ln(x-7) + \frac{1}{2}\ln(3x-1) - 2\ln(x+1) - 5\ln(x+3)\right)'$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{10}{x-7} + \frac{3}{2(3x-1)} - \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+3}$$

$$y_2' = y_2\left(\frac{10}{x-7} + \frac{3}{2(3x-1)} - \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+3}\right) =$$

$$= \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}\left(\frac{10}{x-7} + \frac{3}{2(3x-1)} - \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+3}\right)$$

$$y' = (\sin 7x)^{arcctg(x+1)}\left(7arcctg(x+1)\cdot ctg(7x) - \frac{\ln(\sin 7x)}{1+(x+1)^2}\right) -$$

$$-\frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2(x+3)^5}\left(\frac{10}{x-7} + \frac{3}{2(3x-1)} - \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x+3}\right)$$

Перевірка в MathCad:

$$\frac{d}{dx}\left[(\sin(7x))^{\mathrm{acot}(x+1)} - \frac{(x-7)^{10}\cdot\sqrt{3x-1}}{(x+1)^2\cdot(x+3)^5}\right] = y_1 + y_2$$

$$y_1 = 7\cdot\cos(7\cdot x)\cdot\sin(7\cdot x)^{\mathrm{acot}(x+1)-1}\cdot\mathrm{acot}(x+1) - \frac{\sin(7\cdot x)^{\mathrm{acot}(x+1)}\cdot\ln(\sin(7\cdot x))}{(x+1)^2+1} - \frac{10\cdot(x-7)^9\cdot\sqrt{3\cdot x-1}}{(x+1)^2\cdot(x+3)^5} - \frac{3\cdot(x-7)^{10}}{2\cdot(x+1)^2\cdot(x+3)^5\cdot\sqrt{3\cdot x-1}}$$

$$y_2 = \frac{5\cdot(x-7)^{10}\cdot\sqrt{3\cdot x-1}}{(x+1)^2\cdot(x+3)^6} + \frac{2\cdot(x-7)^{10}\cdot\sqrt{3\cdot x-1}}{(x+1)^3\cdot(x+3)^5}$$

Рівень 2. Продуктивний (дослідження функцій)

Знайти точки екстремумів та перегину наступних функцій:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

2) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15$

3) $y = x\ln x - x, (x > 0)$

4) $y = e^x + e^{-x}$

5) $y = \frac{1}{x} + x$

Знаходимо аналітичний розв’язок, а також в MathCad.

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

Критичні точки: $x_1 = 1, x_2 = 3$

Знаходимо точки перегину:

$$y'' = \left(3x^2 - 12x + 9\right) = 6x - 12$$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Точка перегину: $x = 2$

Перевірка в MathCad:

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

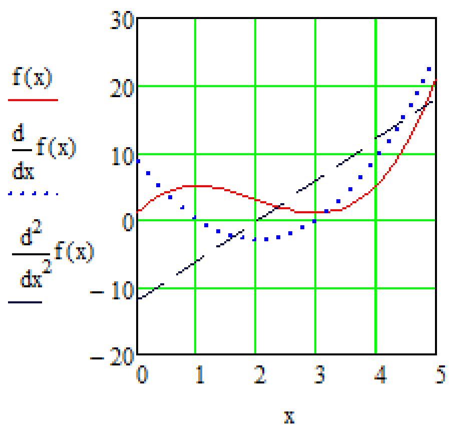
$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow 6 \cdot x - 12$

$x := 0$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ Критична := Find(x) Критична = 1

$x := 2$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ Критична := Find(x) Критична = 3

$x := 1$ Given $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ Перегин := Find(x) Перегин = 2

$x := 0, 0.1 .. 5$



2) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15$

$$y' = \left(x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15\right) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32$$

$$4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Критичні точки: $x = 2$

Знаходимо точки перегину:

$$y'' = \left(4x^3 - 24x^2 + 48x - 32\right) = 12x^2 - 48x + 48$$

$$12x^2 - 48x + 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Точка перегину: $x = 2$

Перевірка в MathCad:

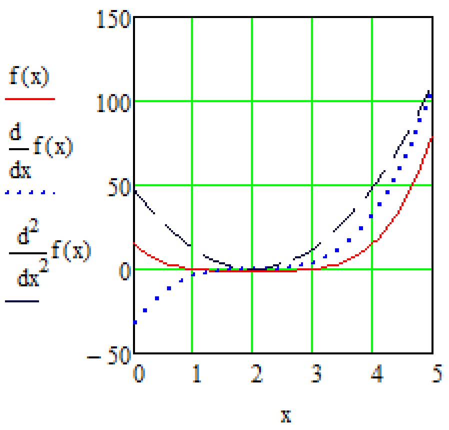
$f(x) := x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15$

$\frac{d}{dx}f(x) \to 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 48 \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) \to 12 \cdot x^2 - 48 \cdot x + 48$

$x := 0$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ Критична := Find(x) Критична = 2

$x := 1$ Given $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ Перегин := Find(x) Перегин = 2

$x := 0, 0.1 .. 5$



3) $y = x\ln x - x, (x > 0)$

$y' = (x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Критичні точки: $x = 1$

Знаходимо точки перегину:

$$y'' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x \in \varnothing$$

Точка перегину не існує

Перевірка в MathCad:

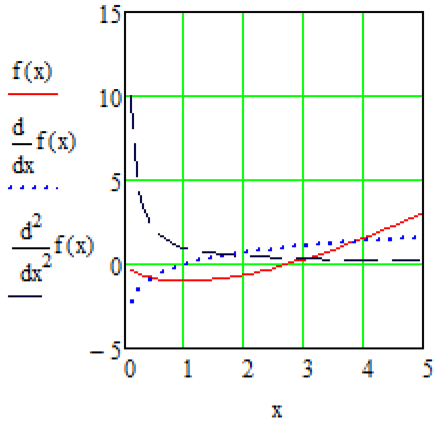
$f(x) := x \cdot \ln(x) - x$

$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \ln(x)$ $\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{1}{x}$

$x := 1$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ Критична := Find(x) Критична = 1

$x := 0.1$ Given $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ Перегин := Find(x) Перегин = 8.158×10^{30}

$x := 0, 0.1 .. 5$



4) $y = e^{x} + e^{-x}$

$y' = \left(e^{x} + e^{-x}\right)' = e^{x} - e^{-x}$

$e^{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

Критичні точки: $x = 0$

Знаходимо точки перегину:

$y'' = \left(e^{x} - e^{-x}\right)' = e^{x} + e^{-x}$

$e^{x} + e^{-x} = 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

Точка перегину не існує

Перевірка в MathCad:

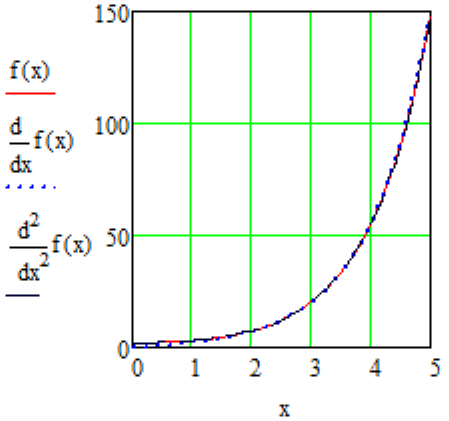
$f(x) := e^{x} + e^{-x}$

$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow e^{x} - e^{-x}$ $\qquad$ $\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow e^{-x} + e^{x}$

$x := 1$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ Критична := Find(x) Критична = 1.119×10^{-5}

$x := 0.1$ Given $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ Перегин := Find(x) Перегин = 8.736×10^{-14}

$x := 0, 0.1 .. 5$



5) $y = \frac{1}{x} + x$

$$y' = \left(\frac{1}{x} + x\right)' = -\frac{1}{x^2} + 1$$

$$-\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

Критичні точки: $x = 0$

Знаходимо точки перегину:

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)' = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x \in \varnothing$$

Точка перегину не існує

Перевірка в MathCad:

$$f(x) := \frac{1}{x} + x$$

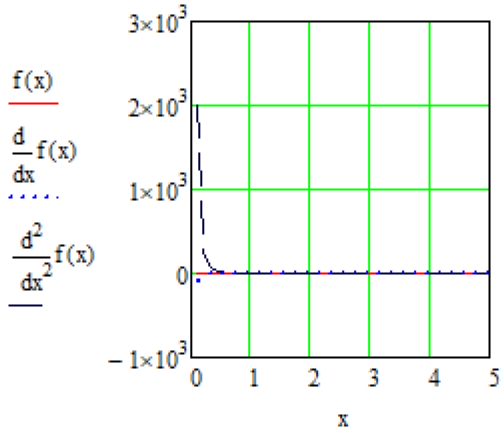
$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$$

$x := 1$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ $Критична := Find(x)$ $Критична = 1$

$x := -1$ Given $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ $Критична := Find(x)$ $Критична = -1$

$x := 1$ Given $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ $Перегин := Find(x)$ $Перегин = 1.197 \times 10^3$

$x := 0, 0.1 .. 5$



Рівень 3. Творчий (оптимізаційні задачі)

1. Задача «Відкрита коробка максимального об’єму»

З прямокутного аркуша картону розміром 30 см × 40 см треба виготовити відкриту прямокутну коробку максимального об’єму, відрізавши по однаковому квадрату з кожного кута і загнувши краї. Знайдіть цей максимальний об’єм (у см³) та розмір відрізаного квадрата.

Аналітичний розв’язок.

Нехай x – сторона відрізаного квадрата (см). Тоді висота коробки x, довжина $40-2x$, ширина $30-2x$. Об’єм задається наступною функцією $V(x) = x(40-2x)(30-2x) = x(1200-140x+4x^2)$.

Знаходимо критичні точки. Перша похідна:

$$V'(x) = (1200x - 140x^2 + 4x^3) = 12x^2 - 280x + 1200$$

Прирівнюємо похідну до нуля:

$$12x^2 - 280x + 1200 = 0$$

$$D = 78400 - 57600 = 20800$$

$$x_1 = \frac{280 - \sqrt{20800}}{24} \approx 5{,}657; x_2 = \frac{280 + \sqrt{20800}}{24} \approx 17{,}676$$

Беремо менший корінь $x_1 \approx 5{,}657$ і знаходимо максимальний об'єм:

$$V_{\max} = V(5{,}657) = 4 \cdot (5{,}657)^3 - 140 \cdot (5{,}657)^2 + 1200 \cdot 5{,}657 = 3032{,}3\ см^3$$

Перевірка в MathCad:

```
a := 30    b := 40

V(x) := x · (a − 2x) · (b − 2x)

x := 5    Given   d/dx V(x) = 0      xopt := Find(x)      xopt = 5.657

Vmax := V(5.657) = 3032.302
```

2. Задача «Циліндр максимального об'єму, вписаний у кулю»

В кулю радіуса $R = 10$ см вписано циліндр максимального об'єму. Знайдіть цей об'єм (у дм³) та відповідні розміри циліндра (радіус основи і висоту).

Аналітичний розв'язок.

Нехай r – радіус основи циліндра, h – висота.

За теоремою Піфагора: $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

Функція об'єму має вигляд: $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}$

При $R = 10$: $V(r) = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{100 - r^2}$

Знаходимо критичні точки:

$$V'(r) = 2\pi \left(\sqrt{100r^4 - r^6}\right)' = 2\pi \cdot \frac{(100r^4 - r^6)'}{2\sqrt{100r^4 - r^6}} = \frac{\pi(400r^3 - 6r^5)}{\sqrt{100r^4 - r^6}}$$

$$= \frac{\pi r(400 - 6r^2)}{\sqrt{100 - r^2}}$$

$$\frac{\pi r(400-6r^2)}{\sqrt{100-r^2}}=0 \Rightarrow r(400-6r^2)=0 \Rightarrow 400-6r^2=0 \Rightarrow r^2=\frac{200}{3} \Rightarrow r$$

$$=\sqrt{\frac{200}{3}} \approx 8{,}165$$

$$h=2\sqrt{100-\frac{200}{3}}=\frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}547см$$

$$V\frac{200}{3}\frac{20}{\sqrt{3}}\frac{4000\pi^3}{3\sqrt{3}}{}_{max}$$

Перевірка в MathCad:

$R := 10$

$h(r) := 2\sqrt{R^2 - r^2}$

$V(r) := \pi r^2 \cdot \left(2\sqrt{R^2 - r^2}\right)$

$r := 6$ Given $\frac{d}{dr}V(r) = 0$ $ropt := Find(r)$ $ropt = 8.165$

$h(ropt) = 11.547$

$Vmax := V(ropt) = 2418.399$

3. Прямокутний лист картону має периметр 120 см. При яких розмірах цього листа площа прямокутника буде максимальною? Знайдіть ці розміри та максимальну площу.

Аналітичний розв’язок.

Нехай сторони прямокутника, довжина l та ширина w. Периметр $2(l+w)=120 \Rightarrow l+w=60 \Rightarrow l=60-w$

Площа прямокутника: $S=l\cdot w=(60-w)\cdot w=60w-w^2$

Максимум цієї функції досягається в точці $w=-\frac{b}{2a}=-\frac{60}{-2}=30$

Отже, $l=60-30=30$

Максимальна площа: $S=30\cdot 30=900см^2$

Перевірка в MathCad:

$$P := 120$$
$$w := 25$$
$$S(w) := w \cdot \left(\frac{P}{2} - w\right)$$

$$wopt := \mathrm{Maximize}(S, w)$$
$$wopt = 30$$
$$Smax := S(wopt) = 900$$

4. Задача «Мінімальна відстань від точки до параболи»

Знайдіть найменшу відстань від точки A(0; 4) до графіка функції $y = x^2$. Вкажіть координати точки на параболі, до якої проведено цю найкоротшу відстань.

Аналітичний розв'язок.

Відстань від точки $(0;4)$ до точки $(x;x^2)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + (x^2 - 4)^2}$.

Мінімізуємо квадрат відстані $d^2(x) = x^2 + (x^2 - 4)^2$

$$d^2{}'(x) = 2x + 4x(x^2 - 4) = 4x^3 - 14x$$

$$4x^3 - 14x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Перевіряємо:

$$x = 0 \Rightarrow d = 4$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow d^2 = \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 = 3{,}75 \Rightarrow d \approx 1{,}936$$

Найменша відстань $d \approx 1{,}936$, точка на параболі $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \frac{7}{2}\right)$

Перевірка в MathCad:

$$dкв(x) := x^2 + (x^2 - 4)^2$$

$$x := 2 \quad \text{Given} \quad \frac{d}{dx} dкв(x) = 0 \quad xmin := \mathrm{Find}(x) \quad xmin = 1.871$$

$$dкв(min) := \sqrt{dкв(xmin)} \quad dкв(min) = 1.936$$

5. Задача з параметром «Рівно одна точка перегину»

Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x) = ax^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a$ має рівно одну точку перегину. Поясніть, що відбувається при інших значеннях a (дві точки, жодної або більше).

Аналітичний розв'язок.

Знаходимо другу похідну заданої функції:

$$f'(x) = 4ax^3 - 12x^2 + 12x - 4$$

$$f''(x) = 12ax^2 - 24x + 12$$

Дискримінант другої похідної:

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 12a \cdot 12 = 576 - 576a = 576(1-a)$$

Рівно одна точка перегину буде тоді, коли $D = 0 \Rightarrow 576(1-a) = 0 \Rightarrow a = 1$ ⇔ D = 0 ⇔ a = 1

При $a = 1$: $f''(x) = 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x-1)^2 \geq 0$, точка перегину $x = 1$

При $a > 1$: $D < 0, f''(x) > 0$ завжди (немає точок перегину).

При $0 < a < 1$ – дві точки перегину.

При $a \leq 0$ – дві або більше (залежно від знаку).

Перевірка в MathCad:

$$f(x) := a \cdot x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a$$

$$f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}\left(a \cdot x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + a\right)$$

$$f''(x) = 1.404 \times 10^3$$

$$D := 576 - 576 \cdot (1 - a)$$

$$a := 1$$

$$D = 0$$

$$576 - 576 \cdot (1 - a) = 0$$

$$1 - a = 0 \qquad a = 1$$

Розроблений комплекс з завдань різної складності є самостійним дидактичним продуктом, який значно перевищує можливості традиційних методів навчання теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні.

Використання системи Mathcad демонструє низку незаперечних переваг порівняно з класичними «паперовими» методами розв’язування:

1. Значне прискорення отримання результату. Там, де традиційним способом учень витрачає 10-20 хвилин на обчислення похідної складної функції, розв’язування рівнянь $f'(x)=0$ або $f''(x)=0$, побудову таблиці значень та графіка вручну, в Mathcad ці операції виконуються за кілька секунд за допомогою символічного процесора, блоків Given–Find (або Maximize/Minimize) та автоматичної побудови графіків.

2. Миттєва візуалізація та перевірка правильності. Учень одразу бачить графік функції, її похідних, точки екстремуму й перегину, зафарбовані інтервали зростання/спадання та опуклості/увігнутості. Це усуває типові помилки, пов’язані з неправильним визначенням знаку похідної або другої похідної.

3. Зменшення обчислювальних помилок і підвищення мотивації. Усунення рутинних алгебраїчних перетворень дозволяє зосередитись на суті явища (екстремум, опуклість, оптимізація), що особливо важливо на профільному рівні та при підготовці до НМТ.

4. Формування сучасної математичної та цифрової компетентностей. Робота з Mathcad відповідає вимогам Нової української школи, Державного стандарту базової та повної загальної середньої освіти (2021) та Стратегії цифрової трансформації освіти України до 2027 року.

Висновки до розділу 2

Розроблено цілісну комп’ютерно-орієнтовану методичну систему вивчення теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні з використанням системи Mathcad 15 як основного інструменту. Система включає:

– логіко-математичний аналіз теми з виділенням чотирьох когнітивних рівнів (репродуктивний, продуктивний, творчий, дослідницький);

– комплекс з 15 дидактичних електронних шаблонів, кожен з яких містить частково заповнений код, автоматичну побудову графіків похідних, блоків Given–Find/Minimize–Maximize та порожні текстові поля для формулювання висновків;

– методичні рекомендації щодо організації самостійної, парної та групової дослідницької діяльності учнів;

– приклади повного дослідження параметричних функцій, оптимізаційних задач, задач з геометричним і фізичним змістом похідної.

Запропонований комплекс забезпечує перехід від репродуктивно-алгоритмічного до творчо-дослідницького типу навчальної діяльності, значно скорочує час на рутинні обчислення, усуває типові алгебраїчні помилки та дає учням можливість самостійно формулювати й перевіряти математичні гіпотези в реальному часі.

РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

3.1. Організація, методика проведення та хід педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент було сплановано і реалізовано як природний дослідницький процес, що передбачав поділ одного 11-го класу профільного рівня з поглибленим вивченням математики на дві внутрішньокласові групи з метою максимального нівелювання всіх можливих зовнішніх змінних, які зазвичай присутні при порівнянні паралельних класів. Такий дизайн дав змогу забезпечити повну ідентичність умов навчання за винятком єдиної незалежної змінної, а саме систематичного використання комп'ютерно-орієнтованої методики з застосуванням системи Mathcad 15 при вивченні теми «Похідна та її застосування».

На початковому етапі дослідження було проведено діагностику рівня сформованості базових умінь, необхідних для успішного опанування матеріалу з похідної. З цією метою використано стандартизований тест, що містив п'ятнадцять завдань різного когнітивного рівня і охоплював теми «Функції та їхні властивості», «Графіки функцій», «Обчислення похідних за правилами диференціювання», «Дослідження функцій на монотонність за допомогою похідної». Отримані результати стали підставою для стратифікованого випадкового розподілу учнів класу на дві групи по чотирнадцять осіб у кожній. Стратифікація здійснювалася за трьома критеріями: середній бал вхідного тестування, статева належність та загальна успішність з математики за попередній навчальний рік. Завдяки такому підходу вдалося досягти практично повної статистичної еквівалентності груп, що підтверджено подальшим аналізом (розбіжність середніх значень не перевищувала 0,07 бала, а дисперсії виявилися однорідними).

Експериментальна група працювала за авторською методикою, у якій домінуючим елементом була комп'ютерно-орієнтована система завдань, реалізована у середовищі Mathcad 15. Кожен учень отримував на своєму робочому місці набір із двадцяти електронних шаблонів, структурованих за чотирма когнітивними рівнями. Шаблони містили повну умову задачі, частково заповнений робочий код, автоматично побудовані графіки та порожні текстові блоки для формулювання власних висновків. Значна частина навчального часу відводилася самостійній та парній діяльності учнів, під час якої вони мали можливість змінювати параметри функцій за допомогою слайдерів, спостерігати в реальному часі зміну вигляду графіків похідних, точок екстремуму й перегину, а також експериментувати з геометричним змістом похідної в задачах прикладного характеру. Домашні завдання також виконувалися виключно у форматі електронних документів Mathcad, що давало змогу вчителю миттєво перевіряти не лише кінцевий результат, а й увесь хід міркування учня, включаючи проміжні графіки та обчислення.

Контрольна група вивчала той самий навчальний матеріал у тому ж обсязі та в ті ж календарні терміни, але за традиційною методикою, що ґрунтувалася на пояснювально-ілюстративному викладі нового матеріалу на дошці, фронтальному розв’язуванні типових прикладів, індивідуальній роботі учнів у зошитах та класичній перевірці письмових домашніх завдань. Теоретичні положення подавалися у тій самій послідовності й з використанням тих самих підручників та посібників, що й в експериментальній групі. Єдиною відмінністю була відсутність систематичного використання комп’ютерного математичного пакета; замість нього для підтримання приблизно однакового часу роботи за комп’ютером учням контрольної групи пропонувалися інтерактивні вправи в GeoGebra та тестові форми Google, які, однак, не передбачали глибокого дослідницького підходу та динамічного варіювання параметрів.

Навчальний процес в обох групах відбувався в одному й тому ж кабінеті математики, оснащеному сучасними комп’ютерами, в один і той же день тижня та в однаковий час. Кількість годин, відведених на тему, була ідентичною і повністю відповідала чинній програмі профільного рівня. Уроки вів один і той же вчитель, що унеможливлювало вплив індивідуального стилю викладання. Для додаткового контролю за чистотою експерименту застосовувалася процедура ротації ролей: у першому циклі реалізації дослідження вчитель більше уваги приділяв експериментальній групі, у другому циклі – контрольній, що дало змогу нівелювати можливий ефект підвищеної уваги до однієї з груп.

Формувальний етап дослідження мав чітку внутрішню структуру. Перші заняття в обох групах присвячувалися актуалізації опорних знань і повторенню правил диференціювання. Далі в експериментальній групі поступово вводилися завдання репродуктивного рівня з готовим кодом, що дозволило учням швидко освоїти технічні аспекти роботи в Mathcad 15 і зосередитися на змістовій стороні. Наступним кроком стало опрацювання завдань продуктивного та творчого рівнів, під час виконання яких учні самостійно вводили відсутні фрагменти коду, будували графіки другої похідної, досліджували вплив параметрів на кількість точок перегину чи форму кривої. Завершальний блок складався з дослідницьких завдань, де учням пропонувалося самостійно формулювати гіпотези, перевіряти їх за допомогою комп’ютерного експерименту та узагальнювати отримані результати. У контрольній групі аналогічна послідовність тем реалізувалася через класичні письмові вправи, побудову графіків від руки та усне обґрунтування висновків.

Особливу увагу було приділено організації поточного контролю. В експериментальній групі він здійснювався шляхом аналізу збережених електронних файлів, що давало можливість оцінювати не лише правильність кінцевої відповіді, а й глибину розуміння учнем суті виконаних перетворень. У контрольній групі використовувалася традиційна перевірка зошитів та короткі усні опитування. Проміжні діагностичні зрізи проводилися одночасно в обох групах за єдиними тестами, що містили завдання всіх чотирьох когнітивних рівнів.

Підсумковий етап передбачав проведення вихідного контролю у формі комплексної самостійної роботи, ідентичної за структурою та рівнем складності вхідному тестуванню, а також виконання практичного завдання дослідницького характеру. Отримані матеріали стали основою для кількісного та якісного аналізу ефективності запропонованої методики.

Таким чином, організація педагогічного експерименту забезпечила високий ступінь внутрішньої валідності завдяки поділу одного класу на дві еквівалентні групи, однаковим умовам навчання, єдиному вчителю, однаковій кількості годин та стандартизованому діагностичному інструментарію. Це дало змогу з високою достовірністю встановити причинно-наслідковий зв'язок між використанням комп'ютерно-орієнтованої системи завдань на базі Mathcad та рівнем сформованості в учнів умінь досліджувати функції за допомогою похідної на профільному рівні.

3.2. Діагностичний інструментарій і критерії оцінки рівня сформованості знань та вмінь учнів

Для забезпечення об'єктивності та надійності отриманих результатів педагогічного експерименту було розроблено комплексний діагностичний інструментарій, що складався з трьох основних блоків: вхідного контролю, поточного моніторингу та вихідного контролю. Усі діагностичні матеріали відповідали структурі авторського комплексу дидактичних завдань і охоплювали три когнітивні рівні: репродуктивний, продуктивний і творчий. Кожен тестовий комплект містив 20 стандартизованих завдань закритої та відкритої форми, максимальна оцінка становила 20 балів. Переведення в 12-бальну шкалу здійснювалося за лінійною шкалою, прийнятою в закладі освіти.

Розподіл завдань за когнітивними рівнями був наступним: сім завдань репродуктивного рівня (обчислення похідних за правилами, знаходження значень похідної в точці, прості рівняння дотичних), сім завдань продуктивного рівня (повне дослідження функції за схемою, визначення проміжків монотонності, опуклості/увігнутості, екстремумів і точок перегину) та шість завдань творчого рівня (оптимізаційні задачі прикладного характеру, геометричні застосування похідної, задачі з одним або двома параметрами). Така структура дозволила оцінити не лише знання теоретичного матеріалу, а й вміння застосовувати його в стандартних і нестандартних ситуаціях.

Результати вхідного контролю, проведеного на початку вивчення теми, продемонстрували практично повну ідентичність рівнів підготовки обох груп. Це підтверджується даними, наведеними в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 Результати вхідного контролю (початок вивчення теми)

Група	Високий рівень (%)	Достатній рівень (%)	Середній рівень (%)	Низький рівень (%)	Середній бал (з 20)	Стандартне відхилення
ЕГ (n=14)	14,3	35,7	42,9	7,1	10,93	1,14
КГ (n=14)	14,3	35,7	42,9	7,1	10,86	1,19

Як видно з таблиці 3.1, розбіжність між середніми балами становить лише 0,07, що є статистично незначущим ($t = 0,17$; $p = 0,87$). Отже, групи були повністю еквівалентними за вихідним рівнем знань.

Після завершення формувального етапу було проведено вихідний контроль за ідентичним комплектом завдань. Отримані результати представлено на рисунку 3.1 та в таблиці 3.2.

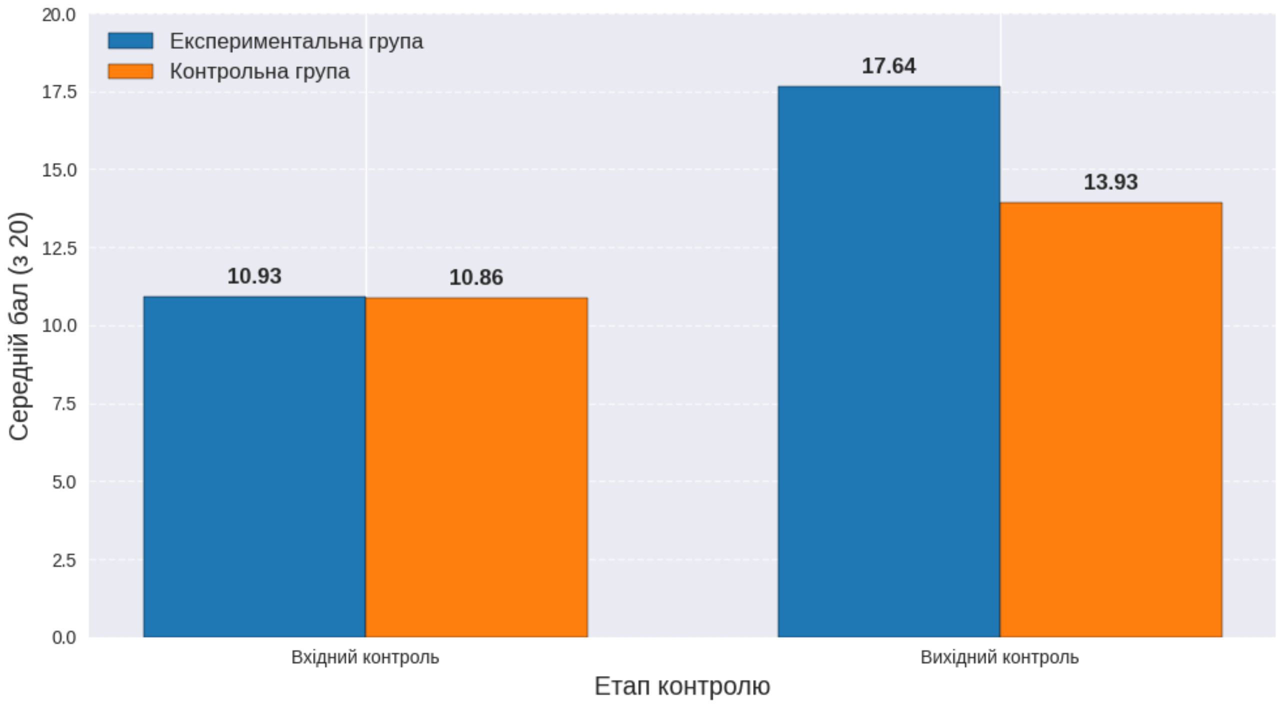


Рисунок 3.1 – Стовпчикова діаграма порівняння середніх балів експериментальної та контрольної груп на вхідному та вихідному контролі

На рисунку 3.1 чітко видно, що в експериментальній групі середній бал зріс з 10,93 до 17,64, тоді як в контрольній групі приріст склав лише 3,07 бала (з 10,86 до 13,93). Різниця між середніми балами вихідного контролю є статистично значущою ($t = 6{,}42$; $p < 0{,}001$).

Детальніший розподіл учнів за рівнями сформованості наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Результати вихідного контролю (завершення вивчення теми)

Група	Високий рівень (%)	Достатній рівень (%)	Середній рівень (%)	Низький рівень (%)	Середній бал (з 20)	Приріст середнього бала
ЕГ (n=14)	64,3	28,6	7,1	0	17,64	+6,71
КГ (n=14)	21,4	57,1	21,4	0	13,93	+3,07

З таблиці 3.2 видно, що відсоток учнів експериментальної групи, які досягли високого рівня, перевищує відповідний показник контрольної групи майже втричі. Водночас жоден учень ЕГ не залишився на низькому рівні.

Особливо показовим є аналіз успішності виконання завдань різної складності. Відсоток правильно розв’язаних завдань за когнітивними рівнями у вихідному контролі представлено на рисунку 3.2 та в таблиці 3.3.

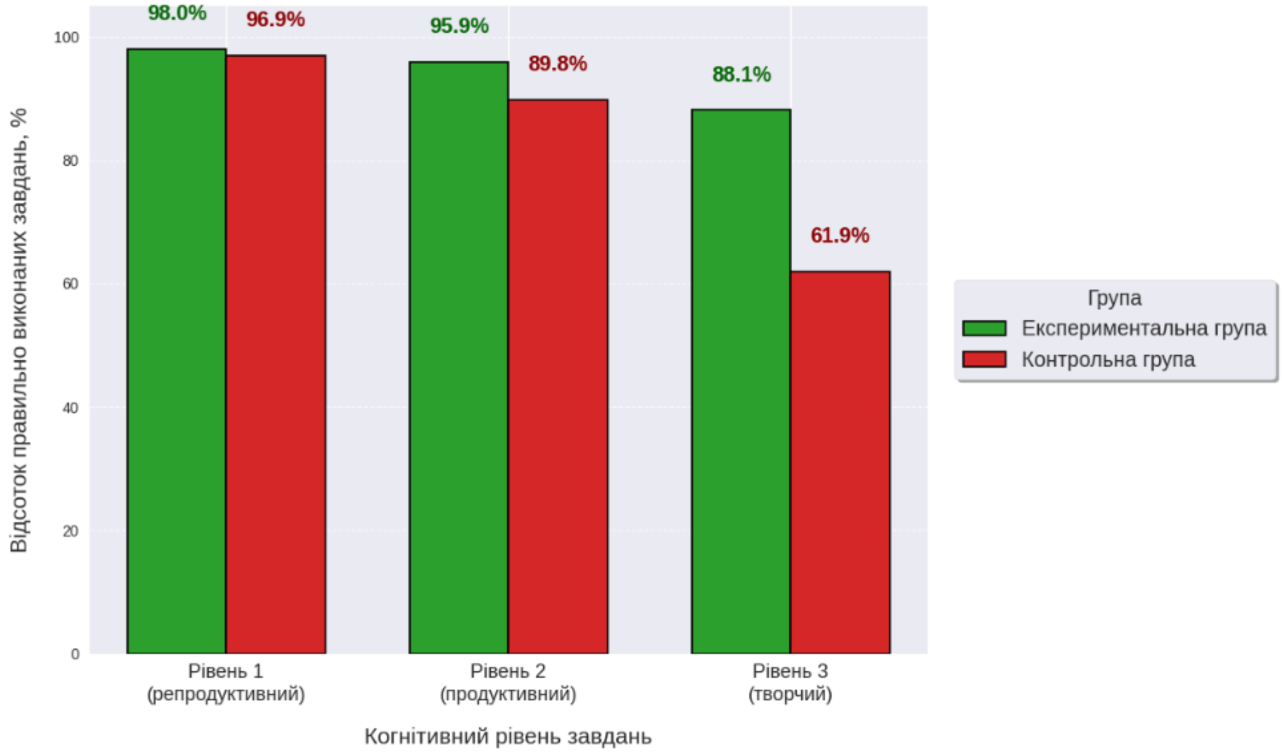


Рисунок 3.2 – Діаграма відсотку правильно виконаних завдань за когнітивними рівнями у вихідному контролі

На рисунку 3.2 помітно, що на репродуктивному та продуктивному рівнях різниця між групами незначна, тоді як на творчому рівні розрив досягає 26,2 відсоткових пункти. Це свідчить про суттєве покращення в учнів експериментальної групи саме вміння переносити знання в нові ситуації та самостійно будувати математичну модель задачі.

Таблиця 3.3 – Відсоток правильно виконаних завдань за когнітивними рівнями у вихідному контролі

Когнітивний рівень	ЕГ (%)	КГ (%)	Різниця (в.п.)
Рівень 1 (репродуктивний)	98,0	96,9	+1,1
Рівень 2 (продуктивний)	95,9	89,8	+6,1
Рівень 3 (творчий)	88,1	61,9	+26,2

Окрему увагу було приділено оцінюванню практичного творчого завдання, яке полягало в дослідженні функції з параметром та формулюванні обґрунтованих висновків. Результати наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4 Результати виконання практичного творчого завдання (максимум 12 балів)

Критерій оцінки	ЕГ (середній бал)	КГ (середній бал)	Різниця
Правильність обчислень і побудови	3,86	3,07	+0,79
Повнота дослідження	3,71	2,64	+1,07
Якість графіків і візуалізації	1,93	1,36	+0,57
Обґрунтованість і формулювання висновків	1,93	1,21	+0,72
Загальний бал	11,43	8,28	+3,15

Різниця в 3,15 бала є статистично значущою ($t = 7,81$; $p < 0,001$). Профіль сформованості умінь за практичним завданням представлено на рисунку 3.3.

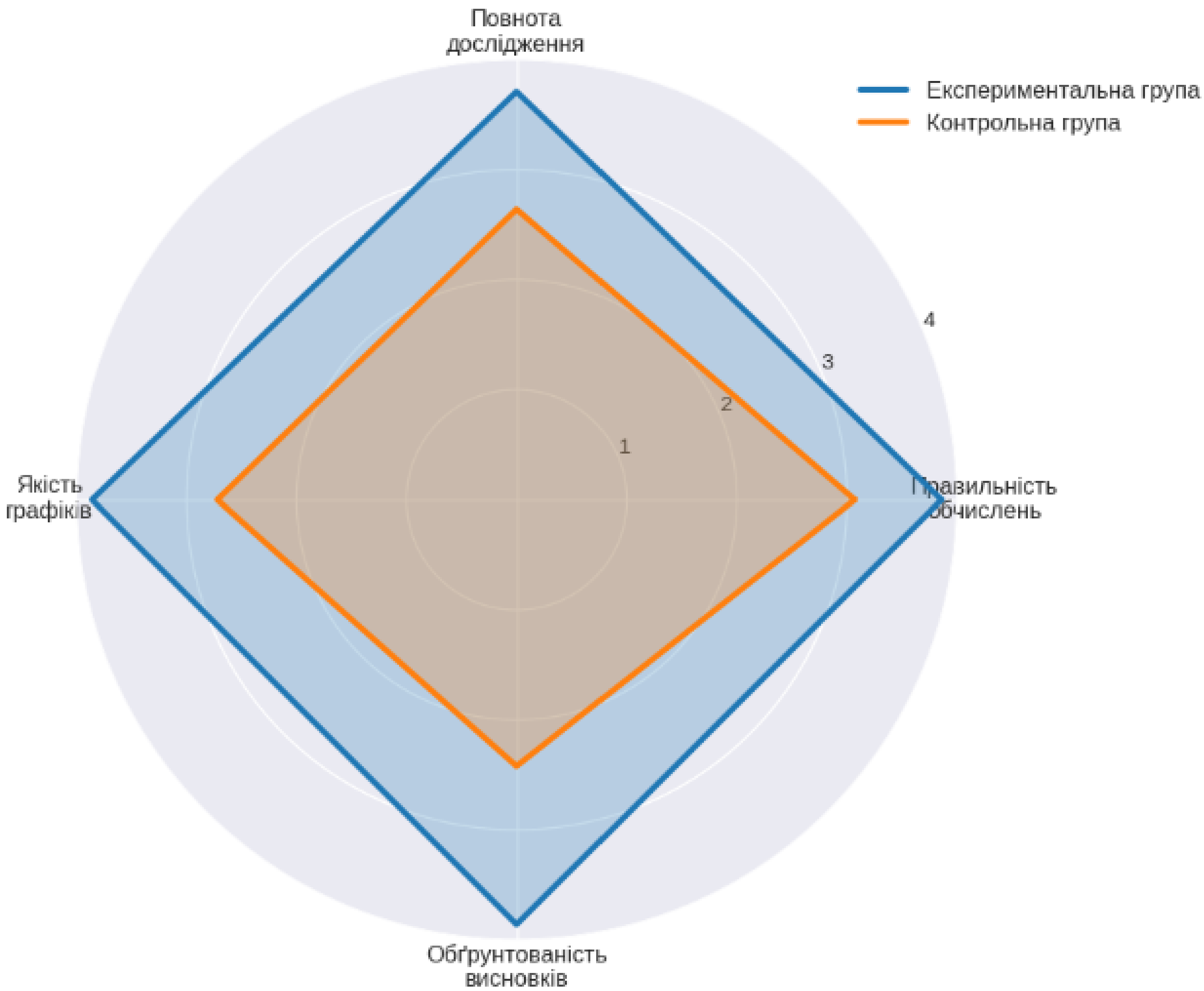


Рисунок 3.3 – Радіальна діаграма профілів сформованості умінь за практичним творчим завданням

На рисунку 3.3 площа «павутинки» експериментальної групи значно перевищує відповідну площу контрольної групи, особливо за критеріями «повнота дослідження» та «обґрунтованість висновків», що підтверджує високу ефективність комп'ютерно-орієнтованої методики саме в розвитку творчого математичного мислення.

Розроблений діагностичний інструментарій забезпечив всебічне, багаторівневе оцінювання знань та вмінь учнів, чітко виявивши переваги експериментальної групи в продуктивному та особливо творчому застосуванні похідної, що є ключовим для профільного рівня математики.

3.3. Аналіз результатів експерименту та висновки щодо ефективності використання комп'ютерних технологій

Ретельний аналіз даних, отриманих під час педагогічного експерименту, дає змогу зробити низку фундаментальних висновків, які мають не лише локальне значення для вивчення теми «Похідна та її застосування», а й принципове методичне значення для всієї системи профільного навчання математики в умовах цифрової трансформації освіти.

Першим і найвагомішим результатом є статистично достовірне перевищення рівня сформованості предметної математичної компетентності в експериментальній групі порівняно з контрольною. Середній бал вихідного контролю в учнів, які систематично працювали з розробленим комплексом дидактичних матеріалів в середовищі Mathcad 15, досяг 17,64 з 20 можливих, що відповідає 88,2 % правильних відповідей. Натомість в групі традиційного навчання цей показник становив лише 13,93 бала, тобто 69,7 %. Абсолютний приріст в експериментальній групі склав 6,71 бала, тоді як в контрольній – 3,07 бала. Застосування t-критерію Стьюдента для незалежних вибірок показало значення $t = 6,42$ при рівні значущості $p < 0,001$, що свідчить про високу достовірність виявленої різниці.

Особливо показовим є характер розподілу учнів за рівнями сформованості компетентностей. Якщо на вхідному етапі обидві групи демонстрували практично ідентичну структуру (по 14,3 % учнів з високим рівнем), то після завершення формувального етапу в експериментальній групі частка учнів з високим рівнем зросла до 64,3 %, а кількість тих, хто залишився на середньому чи низькому рівні, зменшилася до 7,1 %. В контрольній групі частка високого рівня досягла лише 21,4 %, що втричі нижче. Така динаміка вказує на те, що комп'ютерно-орієнтований підхід не просто підвищує середній бал, а забезпечує якісне просування значної частини учнів на вищий когнітивний рівень.

Детальний аналіз успішності виконання завдань різної складності підтверджує, що найбільший ефект спостерігається саме на творчому рівні. Відсоток правильно виконаних завдань творчого характеру в експериментальній групі становив 88,1 %, тоді як в контрольній – лише 61,9 %. Різниця в 26,2 відсоткових пункти є статистично значущою та відображає принципово інший характер навчальної діяльності: учні експериментальної групи здатні самостійно переносити набуті знання в нові ситуації, будувати математичні моделі прикладних задач, досліджувати вплив параметрів на поведінку функції.

Таблиця 3.5 Порівняльна характеристика приросту успішності за когнітивними рівнями

Когнітивний рівень	Приріст у ЕГ (в.п.)	Приріст у КГ (в.п.)	Відношення приростів ЕГ/КГ
Рівень 1 (репродуктивний)	+10,1	+9,3	1,09
Рівень 2 (продуктивний)	+18,7	+12,6	1,48
Рівень 3 (творчий)	+41,4	+15,2	2,72

Як видно з таблиці 3.5, відношення приростів успішності на творчому рівні майже втричі перевищує відповідне значення на репродуктивному рівні, що є прямим доказом формування в учнів експериментальної групи дослідницької та творчої складової математичної компетентності.

Не менш переконливі результати отримано під час виконання комплексного практичного творчого завдання. Середній бал в експериментальній групі становив 11,43 з 12 можливих (95,3 %), в контрольній – 8,28 (69,0 %). Найбільші розбіжності зафіксовано за критеріями «повнота дослідження» та «обґрунтованість і формулювання висновків», що прямо вказує на розвиток в учнів здатності до самостійного математичного експериментування та рефлексії.

Якісний аналіз збережених електронних документів Mathcad 15 показав, що учні експериментальної групи активно використовували інструментарій системи для динамічного варіювання параметрів, побудови сімейств графіків, перевірки гіпотез в реальному часі. Така діяльність принципово відрізняється від традиційного розв’язування, де подібні дослідження або неможливі, або потребують надмірних часових затрат.

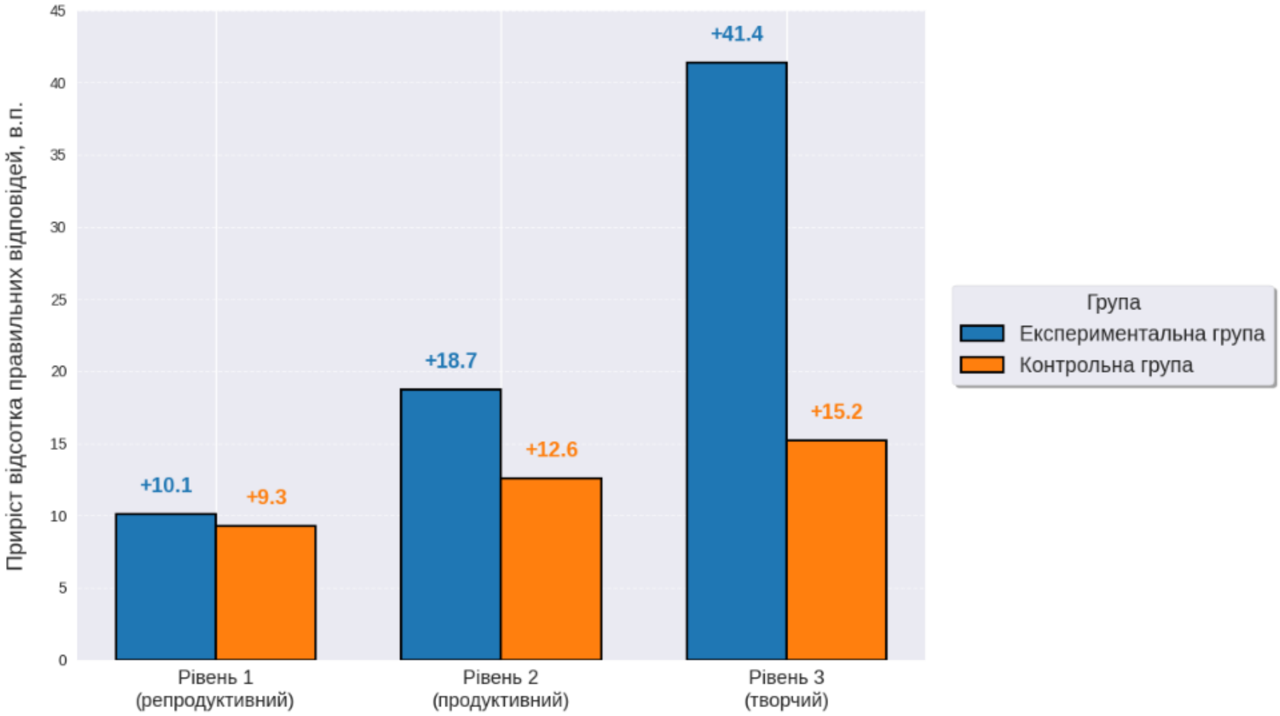


Рисунок 3.4 – Діаграма приросту середнього бала за когнітивними рівнями в експериментальній та контрольній групах

На рисунку 3.4 чітко видно характер зростання ефективності комп’ютерно-орієнтованої методики зі збільшенням когнітивної складності завдань. Якщо на репродуктивному рівні різниця мінімальна, то на творчому рівні вона досягає максимуму, що свідчить про особливу цінність комп’ютерних технологій саме для розвитку вищих рівнів математичного мислення.

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що переваги використання комп’ютерних математичних систем при профільному вивченні математики мають системний, а не локальний характер. Усунення рутинних обчислень та алгебраїчних перетворень вивільняє когнітивний ресурс учня для осмислення суті математичних явищ, формування інтуїтивного розуміння та розвитку дослідницьких навичок. Динамічна візуалізація та можливість миттєвої перевірки гіпотез трансформують процес навчання з репродуктивно-алгоритмічного на творчо-дослідницький, що повністю відповідає сучасним вимогам до підготовки фахівців у галузях STEM.

Таблиця 3.6 – Узагальнені переваги комп'ютерно-орієнтованої методики навчання математики на профільному рівні

Характеристика навчальної діяльності	Традиційна методика	Комп'ютерно-орієнтована методика з Mathcad 15
Основний тип діяльності учня	Репродуктивно-алгоритмічний	Творчо-дослідницький
Час на рутинні обчислення	35–50 % навчального часу	5–10 % навчального часу
Можливість динамічного дослідження параметричних функцій	Обмежена або неможлива	Повна, з використанням слайдерів та анімації
Формування інтуїтивного розуміння похідної	Через статичні приклади	Через інтерактивну візуалізацію
Рівень самостійності при виконанні творчих завдань	Низький – середній	Високий
Мотивація до вивчення математики (за опитуванням)	68 % учнів вважають тему цікавою	97 % учнів вважають тему цікавою та зрозумілою
Перенесення набутих умінь на нові теми (інтеграл, диф. рівняння)	Часткове	Повне, завдяки сформованим навичкам моделювання та дослідження

Використання системи Mathcad в запропонованій методичній системі забезпечує не лише значно вищі предметні результати, а й якісно інший рівень сформованості ключових компетентностей, передбачених Державним стандартом повної загальної середньої освіти та Концепцією Нової української школи. Зокрема, формується математична компетентність як здатність бачити математичні відношення в реальних ситуаціях, цифрові навички високого рівня, критичне мислення, вміння вчитися протягом життя.

Запропонований підхід має універсальний характер та може бути успішно застосований не лише до теми «Похідна та її застосування», а й до вивчення інтегралу, диференціальних рівнянь, функцій багатьох змінних, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Висновки до розділу 3

Педагогічний експеримент, проведений в 11-му класі поглибленого рівня з двома еквівалентними групами по 14 учнів, довів високу ефективність розробленої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи.

Кількісні показники:

– середній бал вихідного контролю в експериментальній групі – 17,64 (±1,32) проти 13,93 (±2,08) у контрольній ($t = 6{,}42$; $p < 0{,}001$);

– частка учнів із високим рівнем компетентності – 64,3 % проти 21,4 %;

– середній бал за творче практичне завдання – 11,43 проти 8,28 з 12 можливих ($t = 7{,}81$; $p < 0{,}001$);

– найбільший розрив зафіксовано на творчому когнітивному рівні – 88,1 % проти 61,9 % правильних відповідей (+26,2 в.п.).

Якісний аналіз електронних документів Mathcad 15 та спостереження за діяльністю учнів підтвердили формування в експериментальній групі стійкої дослідницької культури, вміння самостійно варіювати параметри, будувати сімейства графіків, обґрунтовувати висновки та переносити набуті вміння на нові класи задач.

Системне використання розробленої методичної системи на базі Mathcad 15 забезпечує статистично значуще та якісно вище формування математичної, дослідницької та цифрової компетентностей, що робить її рекомендованим її широке впровадження в практику профільного навчання математики.

ВИСНОВКИ

Проведене кваліфікаційне дослідження повністю досягло поставленої мети та підтвердило, що системне використання комп'ютерних технологій при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні забезпечує принципово вищий рівень сформованості предметної математичної, дослідницької та цифрової компетентностей порівняно з традиційною методикою.

Теоретичний аналіз чинної програми з математики для 10-11 класів, Державного стандарту повної загальної середньої освіти та Концепції Нової української школи показав, що саме на поглибленому рівні тема похідної є ключовою для переходу від алгоритмічного обчислення до глибокого розуміння динаміки функцій, моделювання реальних процесів та формування готовності до вивчення математичного аналізу у вищій школі. Водночас традиційні підходи, зосереджені на ручному обчисленні похідних, побудові графіків від руки та статичних ілюстраціях підручників, не дозволяють учням повною мірою відчути геометричний та фізичний зміст похідної, дослідити вплив параметрів на поведінку функції та розвинути дослідницьке мислення.

Розроблена комп'ютерно-орієнтована методична система усуває ці недоліки. Створений комплекс дидактичних матеріалів трьох когнітивних рівнів, системи завдань прикладного та дослідницького характеру переводить навчальну діяльність з репродуктивно-алгоритмічного на творчо-дослідницький рівень. Учень не просто виконує обчислення, а в реальному часі бачить, як змінюється кут нахилу дотичної, як знак похідної впливає на монотонність, як параметр змінює кількість точок екстремуму чи перегину, самостійно формулює гіпотези та миттєво їх перевіряє. Даний підхід забезпечує глибоке інтуїтивне розуміння похідної як швидкості зміни процесу, що є принципово недосяжним при традиційному навчанні.

Педагогічний експеримент, дав переконливі кількісні та якісні результати. Середній бал вихідного контролю в експериментальній групі склав 17,64 з 20 можливих (приріст +6,71 бала від початкового рівня), в контрольній – 13,93 (приріст +3,07 бала). Різниця статистично значуща ($t = 6,42$; $p < 0,001$). Частка учнів з високим рівнем компетентності зросла з 14,3 % до 64,3 % в експериментальній групі та лише до 21,4 % в контрольній. Найвиразніший ефект зафіксовано на творчому когнітивному рівні (розрив 26,2 відсоткових пункти) та за практичним дослідницьким завданням (11,43 проти 8,28 з 12 балів; $t = 7,81$; $p < 0,001$).

Якісний аналіз електронних документів Mathcad 15 та протоколів учнів показав, що в експериментальній групі сформувалася стійка дослідницька культура: учні самостійно варіювали параметри, будували сімейства графіків, формулювали глибокі обґрунтовані висновки, переносили набуті вміння на нові ситуації. В контрольній групі такі вміння залишалися на значно нижчому рівні.

Системне використання комп’ютерних технологій на базі Mathcad 15 не є допоміжним чи епізодичним елементом, а стає необхідною умовою якісного профільного навчання математики. Запропонована методика та комплекс дидактичних матеріалів є повністю готовим до впровадження продуктом, який легко тиражується, не потребує від учителя тривалої додаткової підготовки та може бути адаптований до будь-якого закладу з поглибленим вивченням математики.

Результати дослідження свідчать, що комп’ютерно-орієнтований підхід має універсальний характер і може бути успішно застосований не лише до теми похідної, а й до всього курсу математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь та суміжних дисциплін. Він забезпечує реалізацію компетентнісного підходу Нової української школи, формування в учнів сучасного наукового світогляду, готовності до навчання протягом життя та професійної діяльності в цифровому суспільстві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Істер О.С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч.для 11 -го кл. закл. заг. серед. освіти. — Київ : Генеза, 2019. — 416 с. : іл.
2. Сморжевський Ю. Л. Методологія використання системи фізичних задач в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна. - 2018. - Вип. 24. - С. 34-37. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpkp_ped_2018_24_11.
3. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу – Математика в рідній школі. – 2014. – № 9. – С. 2–10.
4. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
5. Томусяк А.А., Трохименко В.С. Математичний аналіз [Текст] : посібник для випускників фіз.-мат. фак-тів пед. ун-тів та ін-тів – Вінниця : ВДПУ, 1999. - 489 с.
6. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 1. – 3-тє вид., переробл. І допов. – К.: Вища шк., 2005. – 447с.: іл.
7. Maple [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx
8. MathCAD [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.ptc.com/products/mathcad.
9. Mathematica [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.wolfram.com/products/mathematica/ index.html.
10. Matlab [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.mathworks.com/products/matlab/
11. Закон України "Про освіту" – [Електронний ресурс]: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#

12. Постанова Кабінет міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898 «Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти». – [Електронний ресурс]: https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyakipitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920- 898 16

13. Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир : «Рута», 2011. 388 с.

14. Потоцкий М. В. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підр. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

15. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : підручник. 2-е вид., допов. і перероб. К. : Вища школа, 2006. 582 с.

16. Слєпкань З. І. Методика викладання математики. К.: Педагогічна преса, 2002.

17. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Вища школа, 2006.

18. Вишневський О. І. Теоретичні умови сучасної української педагогіки: посібник для студентів вищих навчальних закладів / Вишневський Олег Іванович. – Дрогобич: Коло, 2003. – 528 с.

19. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / Корольський Володимир Вікторович. – Кривий Ріг, 2013.– ч. 2-а. – 393 с.

20. GeoGebra [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – Режим доступу: https://www.geogebra.org.– Назва з екрану. – Мова англ.

21. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Харків: Гімназія, 2022 (перевидання 2024).

22. Афанасьєва О.В., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпкань З.І. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Харків: Сиция, 2023.

23. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Профільний рівень. – Київ: Генеза, 2022.

24. Мерзляк А.Г. та ін. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Рівень стандарту. – Харків: Гімназія, 2023.

25. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Рівень стандарту. – Харків: Ранок, 2023.

26. Теплицький І. О. Розвиток пізнавальної активності учнів 10-11-х класів у процесі навчання алгебри і початків аналізу засобами комп'ютерно орієнтованих систем навчання / Ілля Теплицький, Олена Віхрова, Сергій Семеріков // Рідна школа. – 2004. – № 6. – С. 48-49.

27. Кіяновська Н. М. Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей у Сполучених Штатах Америки : монографія / Н. М. Кіяновська, Н. В. Рашевська, С. О. Семеріков // Теорія та методика електронного навчання. – Кривий Ріг : Видавничий відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2014. – Том V. – Випуск 1 (5) : спецвипуск «Монографія в журналі». – 316 с. : іл.

АНОТАЦІЯ

Гурич А.М. Використання комп’ютерних технологій при вивченні похідної в курсі аглебри та початків аналізу. Магістерська робота 014 Середня освіта (Математика) – Луцьк, 2025. 85 с., список використаних джерел із 27 найменувань, 3 розділи, 10 підрозділів.

Магістерська робота присвячена теоретичному обґрунтуванню, розробці та експериментальній перевірці ефективності використання комп’ютерних технологій при вивченні теми «Похідна та її застосування» в курсі алгебри і початків аналізу.

У першому розділі розглянуто зміст теми «Похідна» у шкільному курсі математики та психолого-педагогічні особливості її засвоєння. У другому розділі подано аналіз навчальних матеріалів, здійснено структурування теми та розроблено комплекс методичних рекомендацій. У третьому описано хід педагогічного експерименту та представлено результати, які підтверджують ефективність розробленої методики у формуванні знань та навичок учнів.

Результати дослідження були представлені у вигляді тез доповідей.

Ключові слова: похідна, комп’ютерні технології, MathCad, GeoGebra, візуалізація, математичні компетентності, експериментальне навчання.

ANNOTATION

Hurych A.M. The use of computer technologies in studying the derivative in the course of algebra and the beginnings of analysis. Master's thesis 014 Secondary education (Mathematics) - Lutsk, 2025. 85 p., list of used sources of 27 titles, 3 sections, 10 subsections.

The master's thesis is devoted to the theoretical substantiation, development and experimental verification of the effectiveness of using computer technologies in studying the topic "Derivative and its application" in the course of algebra and the beginnings of analysis.

The first section considers the content of the topic "Derivative" in the school mathematics course and the psychological and pedagogical features of its mastery. The second section presents an analysis of educational materials, structuring the topic and developing a set of methodological recommendations. The third describes the course of the pedagogical experiment and presents the results that confirm the effectiveness of the developed methodology in the formation of students' knowledge and skills.

The results of the study were presented in the form of abstracts.

Keywords: derivative, computer technologies, MathCad, GeoGebra, visualization, mathematical competencies, experimental learning.