

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Географічний факультет
Кафедра фізичної географії

В.О. Фесюк

КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ГІДРОЛОГІЇ

Курс лекцій

Луцьк
2025



УДК 001.89(075.8)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 3 від 19.11.2025 р.)

Рецензенти:

Ільїн Леонід Володимирович – доктор географічних наук, професор, завідувач кафедри туризму та готельного господарства Волинського національного університету імені Лесі Українки

Фесюк В.О. Кількісні методи в гідрології: курс лекцій. Луцьк, 2025. 58 с.

Курс лекцій містить короткий виклад теоретичного матеріалу з нормативного освітнього компоненту Кількісні методи в гідрології.

Рекомендовано студентам 5 курсу спеціальності Е4 Науки про Землю (ОПП Гідрологія)

УДК 001.89(075.8)

Фесюк В.О., 2025

© Волинський національний
університет імені Лесі Українки, 2025

Зміст

1. Методи математичної статистики і теорії ймовірності в гідрології.....	4
2. Застосування методів теорії графів у гідрології	23
3. Застосування диференціальних рівнянь та систем рівнянь для моделювання гідрологічних процесів.....	29
4. Елементарні функції та їх застосування в гідрології та гідроекології ...	38
5. Математичні методи просторового аналізу інформації.....	49
Рекомендована література та Інтернет-ресурси.....	57

1. Методи математичної статистики і теорії ймовірності гідрології

План

1.1. Основні поняття математичної статистики і теорії ймовірності

1.2. Аналіз структури та дослідження взаємозв'язків

1. Основні поняття математичної статистики і теорії ймовірності

При дослідженні екосистем чи геосистем з метою подальшого моделювання та прогнозування певних їх параметрів наважливішими аспектами є аналіз структури системи та аналіз її динаміки. Останній буде більш детально висвітлений в наступному параграфі. Щодо структури, то для її вивчення найчастіше застосовуються методи еколого-стохастичного моделювання, що ґрунтуються на математичному апараті математичної статистики і теорії ймовірності. В даному посібнику не має можливості повно та ґрунтовно викласти основи цих розділів математики, тому надалі ми зупинемось лише на висвітленні основних понять та найпоширеніших методів.

Величезний потік інформації про стан навколишнього природного середовища, який сьогодні приходится обробляти екологічній науці, широке та інтенсивне запровадження кількісних методів, що диктується нагальною необхідністю вирішувати важливі прикладні задачі охорони природи, вимагають від сучасного спеціаліста-еколога оволодіння і застосування математико-статистичних методів. Статистичний аналіз суттєво розширює в наш час область застосування. Багата база емпірично отриманих даних про стан навколишнього природного середовища, результати фонових екологічних моніторингу дає можливість для більш точного кількісного та більш глибокого якісного вивчення явищ і об'єктів. Разом з тим подальші потреби розвитку екологічної науки та практики ставлять задачі дослідження складних явищ, сукупностей взаємопов'язаних об'єктів, систем. Все це призводить до необхідності виявлення і вивчення кількісних і якісних закономірностей, багато із яких мають статистичний характер.

Статистика – це галузь знань чи практичної діяльності, спрямована на збирання, групування, обробку та інтерпретацію даних. В перекладі із латини “*statistica*” – сума знань про державу. Вперше в сучасному розумінні термін був запроваджений Г. Ахенвалем (1719-1772). Предметом математичної статистики є статистична сукупність.

Статистична сукупність – це множина індивідуально відмінних об'єктів, що володіють спільними властивостями. Статистична сукупність може бути утворена за одним чи декількома ознаками. Кожний елемент цієї сукупності характеризується певним значенням цієї ознаки (властивості), що і є об'єктом вивчення. Окреме значення групувальної ознаки називається **варіантою**. Число, що показує скільки разів дана варіанта спостерігалась в досліджуваній сукупності називається **частотою**. Якщо розділити частоти на загальну величину статистичної сукупності (кількість варіант у ряді), то отримаємо – **частоти**. Вони виражаються в долях одиниці, а їх сума дорівнює 1.

Ряд статистичних даних, який отримано в результаті їх зведення і групування за певною змінною кількісною чи якісною ознакою, називається **рядом розподілу**. Розрізняють ряди розподілу **атрибутивні** – утворені за змінними якісними ознаками та **варіаційні** – утворені за кількісними ознаками. Останні застосовуються більш широко. Для того, щоб отримати варіаційний ряд, слід розмістити варіанти у зростаючому чи спадному порядку і вказати відносно кожної її частоту. Тому варіаційний ряд найчастіше представляють у вигляді таблиці з двома колонками, в одній із яких – значення варіант упорядкованої сукупності, а в іншій – частоти (табл. 1.1). Варіаційні ряди, в свою чергу, поділяються на **дискретні** – побудовані за перервними значеннями варіант та **інтервальні** – побудовані, відповідно, за неперервними значеннями варіант. Останні можуть мати **однакові** або **неоднакові** інтервали.

Таблиця 1.1. Приклад представлення дискретного варіаційного ряду

рН, x	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5
Частота, f	2	1	1	7	11	5	9	4
Накопичена частота, S _f	2	3	4	11	22	27	36	40

В таблиці 1.1 представлені результати визначення кислотності 40 проб ґрунту, відібраних в межах індустріальних зон м. Луцька. Перший і другий рядок таблиці являють собою стандартний варіаційний ряд, в якому навпроти кожного окремого значення рН наведено його частоту (f) і

накопичену частоту (S_f), яку ми дещо пізніше використаємо при побудові графіків розподілу.

Таблиця 1.2. Приклад представлення інтервального варіаційного ряду

Межі інтервалів, рН	$\leq 7,0$	7,1-7,4	$\geq 7,5$
Частота, f	4	32	4

В таблиці 1.2 варіаційний ряд з попередньої таблиці розбитий на 3 інтервали: з кислотністю рН до 7,0; 7,1-7,4 і більше або рівно 7,5.

В інтервальному варіаційному ряду розрізняють верхню і нижню межу інтервалу (класу). В кожний інтервал включають варіанти, числові значення яких рівні або відповідно більші (менші) нижньої (верхньої) межі класу, згідно умов включення, які можуть бути строгими – з використанням знака $=$, або нестрогими – з використанням знаків \leq або \geq . Інтервальний варіаційний ряд можна представити не лише у вигляді таблиці, але й у вигляді графіка. Графік будується в прямокутній системі координат. На одній з осей (найчастіше – осі абсцис) відкладають інтервали або серединні значення класів, а по іншій осі – частоти або частоті. В залежності від особливостей побудови (рис. 1) даний графік може бути представлений у вигляді: гістограми (для інтервального ряду), полігону (для дискретного ряду), кумуляти або огіви (для обох рядів).

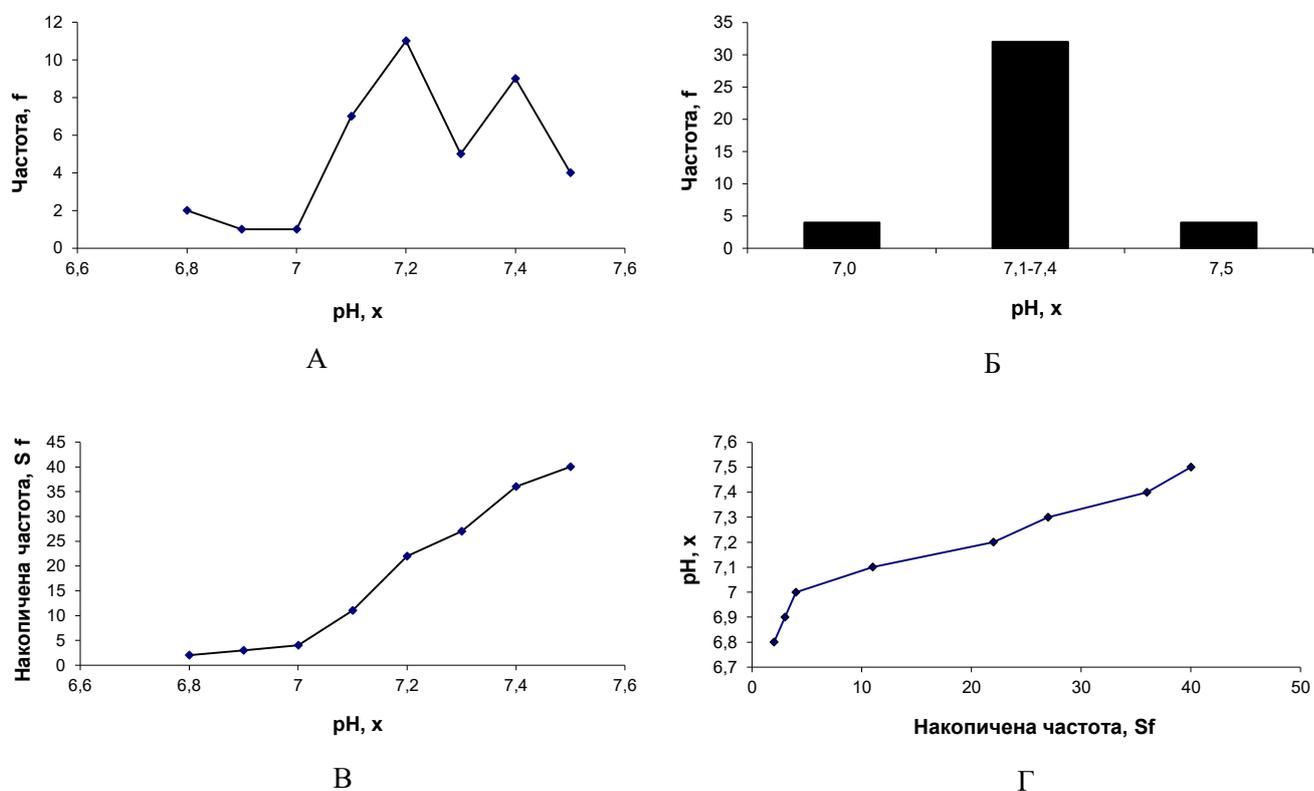


Рис. 1.1. Приклади графічного відображення варіаційного ряду, наведеного в таблицях 1.1, 1.2: А – полігон, Б – гістограма, В – кумулята, Г – огіва.

Для того, щоб побудувати **полігон розподілу**, слід на осі абсцис відмічати точки, що відповідають серединам класів, на осі ординат – частоти (частоті), а потім сполучити отримані точки прямими відрізками. Отримана ліміна лінія і є **полігоном розподілу** (рис. 1.1.а).

Гістограму або **стовпчасту діаграму** можна отримати, якщо зобразити інтервальний ряд сукупністю прямокутників із спільною основою. Ширина кожного прямокутника пропорційна величині класу, а його висота – частоті або частоті класу. Гістограма для таблиці 2 зображена на рис. 1.1.б.

Кумулята (кумулятивна крива) – зображення в прямокутній системі координат варіаційного ряду з накопиченими частотами. Для її побудови по осі абсцис відкладається значення ознаки, а по осі

ординат – накопичені частоти або частоти. Потім отримані точки сполучають ламаною лінією, яка і є **кумулятою** (рис. 1.1.в). Якщо, навпаки, по осі ординат відкладати значення ознаки, а по осі абсцис – накопичені частоти або частоти, а потім отримані точки з'єднати ламаною лінією, отримаємо **огіву** (рис. 1.1.г).

Формування вибірки. Для того, щоб отримати виключну інформацію про статистичну сукупність, потрібно повністю врахувати її склад. На практиці це виявляється надзвичайно складно, витратно, а іноді й просто неможливо. Наприклад, провести детальні геохімічні чи гідрохімічні дослідження великих територій та побудувати поле концентрації забруднюючих речовин, яке складається із нескінченної кількості точок. Тому аналізу піддається, як правило, не вся сукупність, а лише деяка її частина, висновки ж пізніше поширюються на всю сукупність. Сукупність, із якої відбираються варіанти для подальшого статистичного вивчення називається **генеральною сукупністю**. Відібрані із генеральної сукупності варіанти утворюють **вибірку** або **вибіркову сукупність**. Сутність вибіркового методу полягає в тому, що за властивостями вибірки (частини) можна судити про характеристики генеральної сукупності (цілого). Для того, щоб дане судження було правильним, необхідно, щоб вибірка була достатньо **репрезентативною**. З поняттям репрезентативності тісно пов'язане поняття **похибки вибірки** – розбіжності між показниками генеральної та вибіркової сукупності. Розрізняють **систематичну** і **випадкову** похибку вибірки. Перша виникає внаслідок порушення правил випадкового відбору елементів вибіркової сукупності, а інша – в результаті недостатньо рівномірного представлення у вибірковій сукупності різних категорій елементів генеральної сукупності. Якщо систематичних похибок можна уникнути, то випадкових похибок уникнути не вдається. Їх величина залежить від обсягу вибірки, способу її формування, характеру коливання (варіації) ознаки в генеральній сукупності.

Основними перевагами вибіркового методу є:

- практичність;
- зниження реєстрації помилок;
- проведення статистичних досліджень, пов'язаних із знищенням зразків;
- зниження затрат на проведення дослідження та обробку його результатів;
- швидкість та оперативність дослідження.

Найчастіше розрізняють такі методи формування вибірових сукупностей:

- простий випадковий відбір;
- систематичний (механічний) відбір;
- типовий (районований) відбір;
- серійний відбір.

Простий випадковий відбір здійснюється шляхом вибору варіант без попереднього розчленування генеральної сукупності на окремі групи (класи). Цей спосіб забезпечує хороший результат, якщо між варіантами генеральної сукупності немає різких відмінностей.

При **систематичному відборі** досліджують одиниці сукупності, які розташовані на однаковій відстані та у певній послідовності серед впорядкованої генеральної сукупності. При цьому задається початок відбору, крок відліку та обсяг вибірки. В геоекології систематична вибірка використовується при зчитуванні інформації із спеціалізованих карт: у вибірку заноситься значення картованого параметра у вузлових (систематичних) точках, наприклад, у вузлах координатної сітки.

При **типовій вибірці** формування вибіркової сукупності відбувається на основі попередньої структуризації генеральної сукупності і незалежного відбору елементів із кожної групи (типу). В геоекології дана вибірка найчастіше називається районованою. Для отримання районованої вибірки за картографічним матеріалом потрібно досліджувану територію поділити на складові частини, потім одиниці вибірки відбираються по кожному району окремо. Число одиниць, що відбираються в вибірку по кожному району приймається пропорційним його площі.

При **серійній вибірці** випадковим чином вибирають групи (серії) одиниць із генеральної сукупності, які повністю досліджуються і їх статистичні властивості екстраполюються на всю сукупність.

Використання того чи іншого способу формування вибіркової сукупності залежить від можливостей спостереження та його мети. Надійніші результати отримують, комбінуючи різні способи формування вибірки.

Попередня обробка даних. Провівши вибір із генеральної сукупності, виміряють одну чи декілька характеристик елементів. Якщо характеристика якісна, то проводять якимось чином її класифікацію і приписують кожній окремій класифікаційній групі (класу) якесь ціле число, що

називається **рангом**. З допомогою рангів класи впорядковуються і надалі стають придатними для кількісного аналізу. Така процедура називається **ранжуванням**.

Аналіз варіаційного ряду розподілу полягає у виявленні закономірностей зміни частот залежно від зміни кількісної ознаки, яка покладена в основу групування. При аналізі варіаційних рядів найбільш важливими є такі групи показників:

- характеристики центру розподілу;
- характеристики розміру варіації;
- характеристики форми розподілу.

Центром розподілу називається таке значення змінної ознаки, навколо якого групуються інші варіанти. До характеристик центру розподілу відносяться середня величина, мода і медіана.

Середня величина – це інформативна міра “центрального положення” досліджуваної змінної величини. Середнє значення показує типову, характерну величину ознаки, віднесену до одиниці статистичної сукупності. В середній величині нівелюються індивідуальні відмінності одиниць сукупності, які зумовлені дією випадкових факторів, і виявляються загальні закономірності. Виділяються наступні форми середньої величини: середня арифметична, середня гармонійна, середня геометрична, середня квадратична.

Середня арифметична – найпоширеніша форма середньої величини. Її використовують для характеристики рядів розподілу, сума окремих значень ознаки в яких утворює загальний обсяг ознаки:

$$\bar{x}_a = \frac{\sum x}{n}, \quad (1.1)$$

де \bar{x}_a – середня арифметична, x – значення ознаки, n – кількість варіант ряду.

Середня гармонійна є величиною, яка обернена до середньої арифметичної з обернених значень ознаки:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}, \quad (1.2)$$

де \bar{x}_h – середня гармонійна. Середня гармонійна використовуються коли не задана чисельність сукупності і варіанти зважуються за значеннями ваг.

Середня геометрична використовується при аналізі рядів динаміки для розрахунку середніх коефіцієнтів (темтів) зміни. Її ще іноді називають динамічною середньою. Розраховується за формулою:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \quad (1.3)$$

де \bar{x}_g – середня геометрична.

Середню квадратичну використовують при розрахунках абсолютних і відносних показників варіації ознаки:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}, \quad (1.4)$$

де \bar{x}_q – середня квадратична.

Кожна із цих середніх величин може розраховуватись також в зваженому вигляді. **Зважування середньої величини** полягає у домноженні чисельника та знаменника розрахункової формули середньої величини на частоту реалізації ознаки f , а для середньої геометричної – у піднесенні x під дробом степеня $\sum f$ до степеня f_i , де $i \in (1; n)$.

Окрім середніх величин використовують ще поняття моди та медіани. **Моду** називають таке значення ознаки, яке найчастіше зустрічається у сукупності. Для дискретного варіаційного ряду модою є варіанта, що має найбільшу частоту або частість. Для інтервального варіаційного ряду з однаковою шириною інтервалів моду розраховують за формулою:

$$M_0 = \underline{x}_{M_0} + h \cdot \frac{f_{M_0} - f_{M_0-1}}{(f_{M_0} - f_{M_0-1}) + (f_{M_0} - f_{M_0+1})}, \quad (1.5)$$

де M_0 – мода; \underline{x}_{M_0} – нижня межа модального інтервалу; h – довжина інтервалу; $f_{M_0}, f_{M_0-1}, f_{M_0+1}$ – частоти модального, передмодального і післямодального інтервалів, причому **модальним** називається інтервал, що характеризується найвищою частотою ознак варіант, які входять до нього.

Якщо довжина інтервалів варіаційного ряду неоднакова, то для розрахунку моди потрібно звести ряд до інтервального з однаковими інтервалами. Варіаційний ряд може мати одну чи декілька мод. Наявність декількох мод свідчить про неоднорідність сукупності, тобто про об'єднання в одній сукупності різноякісних одиниць. найлегше визначити величину моди графічно. Для цього слід сполучити на гістограмі розподілу праву верхню вершину прямокутника, що відповідає модальному інтервалу (має найбільшу частоту) і з правою вершиною прямокутника, що відповідає передмодальному інтервалу (попередній прямокутник), а ліву вершину модального сполучити із лівою вершиною післямодального прямокутника (рис. 1.2.а).

Медіаною називається середнє значення ознаки в ранжованому ряді варіант, тобто значення рівновіддалене від початку і кінця варіаційного ряду. Якщо кількість варіант непарна, то медіаною є варіанта із порядковим номером:

$$M_e = \frac{x_{n+1}}{2} \quad (1.6)$$

Якщо кількість варіант парна, то:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \quad (1.7)$$

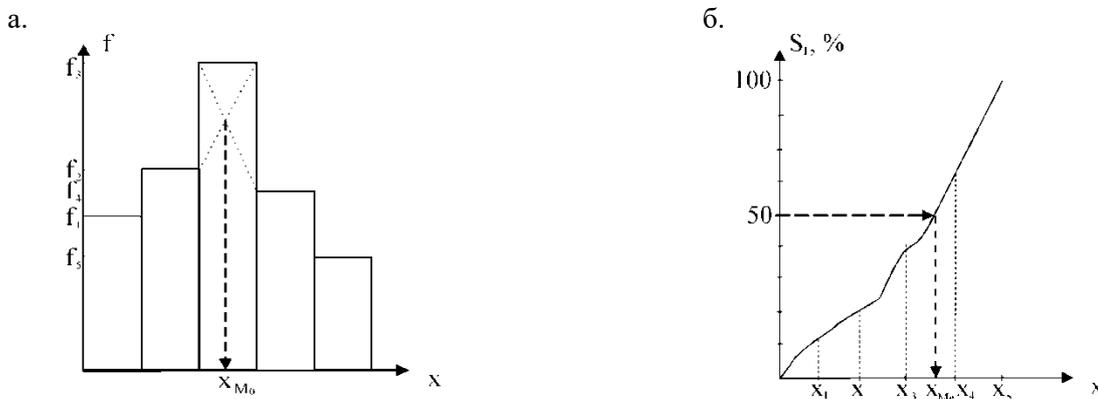


Рис.1. 2. Графічний спосіб визначення моди (а) і медіани (б) інтервального ряду

Для того, щоб знайти медіану інтервального ряду, потрібно спочатку знайти **медіанний інтервал**, тобто такий інтервал, для якого нагромаджена частота (або відносна частота) дорівнює півсумі всіх частот (відносних частот) або перевищує її. В загальному випадку значення медіани розраховується за формулою:

$$M_e = \underline{x}_{M_e} + h_{M_e} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sum f - S_{M_e-1}}{f_{M_e}}, \quad (1.8)$$

де \underline{x}_{M_e} – нижня межа медіанного інтервалу; h_{M_e} – довжина медіанного інтервалу; $\sum f$ – сума частот (відносних частот); S_{M_e-1} – сума частот, нагромаджених перед медіанним інтервалом; f_{M_e} –

частота медіанного інтервалу.

Найлегше визначити медіану графічним способом. Для цього слід на кумуляті (кривій накопичених частот) поділити останню ординату (суму накопичених частот) навпіл і через точку з половинною максимальною ординатою (тобто накопиченою частотою – 50%) провести пряму, паралельно осі Ox до перетину з кумулятою. Абсциса перетину цієї прямої із кумулятою і є медіаною (рис. 1.2.б).

Характеристика розміру варіації. Середня величина є дуже інформативним показником. Але її типовість і надійність для всього ряду залежать від розміру і знаку відхилень пересічних варіант від середньої. Тому в статистиці важливим є не тільки розрахунок середньої, але й меж її довірчих інтервалів. Чим ці межі вузчі, тим краще середня характеризує загальний рівень ряду.

Відхилення значень варіант від середнього значення називається **варіацією ряду**. Показники варіації поділяються на **абсолютні** і **відносні**. Перші розраховуються за конкретними значеннями варіант. Серед абсолютних показників найважливішими є: розмах варіації, середнє арифметичне відхилення і середнє квадратичне відхилення.

Розмах варіації являє собою максимальну амплітуду відхилення між максимальним і мінімальним значенням ряду:

$$R = X_{\max} - X_{\min}, \quad (1.9)$$

де R – розмах варіації, X_{\max} і X_{\min} – відповідно найбільше і найменше значення ряду. Використовується розмах варіації, як правило, тоді, коли важливо знати інтервал можливого коливання значень ряду. Однак розмах варіації не дуже надійний показник, оскільки він залежить від значень крайніх у варіаційному ряду варіант, які, як правило, найменш надійні. Тому більш показовою є міра розсіяння варіант навколо середнього значення. Такій умові відповідають середнє арифметичне та квадратичне відхилення.

Середнє арифметичне відхилення розраховується за формулою:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad (1.10)$$

або те ж саме у зваженій формі:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f}, \quad (1.11)$$

де f – частота відповідної варіанти. Середнє арифметичне відхилення дає певне уявлення про варіацію ознаки, але має один суттєвий недолік: іноді буває так, що відхилення від середнього значення ряду є значними за модулем, а середнє відхилення не дуже велике. Тому суттєво більшого поширення набув показник **середнього квадратичного відхилення**:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}, \quad (1.12)$$

або те ж саме у зваженій формі:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}}, \quad (1.13)$$

де f – частота відповідної варіанти. Хоча і середнє арифметичне відхилення (\bar{d}) і середнє квадратичне відхилення (σ) характеризують один і той же ж параметр – варіацію, але між ними існує деяка розбіжність у числових значеннях. Це пояснюється тим, що при піднесенні до квадрата питома вага малих відхилень зменшується, а великих збільшується. В багатьох джерелах [фешур,] наводиться емпіричне відношення між цими величинами:

$$\sigma = 1,25 \bar{d} \quad (1.14)$$

Відносних показників варіації відомо багато. В спеціальній літературі вони розглянуті дуже широко, але ми зупинемось лише на двох із них – **коефіцієнтах варіації та дисперсії**, що є найбільш вживаними. **Коефіцієнт варіації** являє собою відношення середнього квадратичного відхилення до середнього арифметичного варіаційного ряду, виражене в процентах, і розраховується за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (1.15)$$

Коефіцієнт варіації використовується для оцінки однорідності сукупності. Якщо $V \leq 33\%$, сукупність є однорідною, \bar{x} – типовою і надійною характеристикою сукупності.

На основі вищесказаного ми підходимо до розуміння сутності **дисперсії**. **Дисперсія** – це середня арифметична квадратів відхилень варіант від їх середньої арифметичної:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f} \quad (1.16)$$

Як видно з формули (13), середнє квадратичне відхилення, по суті, є коренем квадратним із дисперсії. Дисперсія володіє властивістю мінімальності: дисперсія менша середньої арифметичної квадратів відхилень варіант від будь-якої сталої величини, що відрізняється від середньої арифметичної.

Якщо сукупність доволі велика і не дуже однорідна, то її, як правило, ділять на декілька груп. Тоді для оцінки впливу групоутворюючих ознак на загальну варіацію ознаки важливими є такі показники: загальна дисперсія, групова дисперсія, середня з групових дисперсій, міжгрупова дисперсія. **Загальна дисперсія** в такому випадку розраховуватиметься за формулою (1.16).

Групова дисперсія становитиме:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum (x - \bar{x}_i)^2 \cdot f}{\sum f} \quad (1.17)$$

середня з групових дисперсій:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \quad (1.18)$$

а міжгрупова дисперсія:

$$\delta_i^2 = \frac{\sum (\bar{x} - \bar{x}_i)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \quad (1.19)$$

де \bar{x}_i – середня для i -тої групи; \bar{x} – середня для всієї сукупності; f – частота реалізація явища; f_i – обсяг i -тої групи.

Якщо групові дисперсії не дорівнюють нулю, то значить в межах виділених груп ще залишилась варіація, зумовлена зовнішніми по відношенню до групувальних ознак. Така варіація оцінюється **залишковою дисперсією**. Міру впливу групувальної ознаки на утворення загальної дисперсії характеризує міжгрупова дисперсія. Тому **загальна дисперсія** дорівнює сумі середньої з внутрішньогрупових дисперсій і міжгрупової дисперсії:

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}_i^2 + \delta^2 \quad (1.20)$$

Відношення міжгрупової дисперсії до загальної дисперсії називають **коефіцієнтом детермінації**:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} \quad (1.21)$$

Цей коефіцієнт показує яку частину загальної дисперсії становить міжгрупова дисперсія, або іншими словами наскільки дія груповальної ознаки (тобто покладеної в основу виділення груп) впливає на загальну варіацію досліджуваної ознаки. Коефіцієнт детермінації використовується для оцінки адекватності рівняння тренду при побудові регресійних моделей екологічних явищ та процесів. Це дуже зручно використовувати при роботі з табличним процесором Excel 2000 пакету прикладних програм Microsoft Office 2000 (або іншими версіями цієї програми). В даній комп'ютерній програмі коефіцієнт детермінації позначається R^2 . Якщо програма пропонує декілька альтернативних ліній тренду, то адекватнішим буде той тип рівняння тренду, для якого величина буде R^2 більшою.

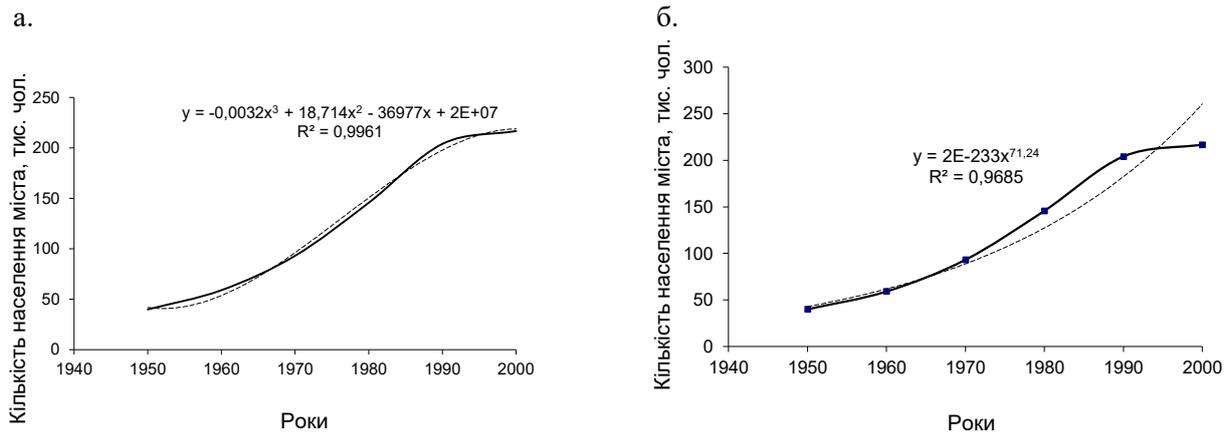


Рис. 1. 3. Побудова лінії тренду за допомогою різних функцій (поліноміальної (а) та степеневі (б)) за допомогою табличного процесора Excel 2000

Як видно із рис. 1.3 більш адекватно описує рівняння лінії тренду графік поліноміальної функцій, тому для нього характерно вище значення коефіцієнта детермінації.

Ми навмисно так широко зупинились на розрахунових формулах різних видів дисперсії. Дисперсійний аналіз є одним із найбільш поширених у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля методів статистики. Він дозволяє відповісти на питання: чи вірогідний вплив того чи іншого фактора на стан техноекосистеми, або на результати впровадження тих чи інших природоохоронних заходів. Він також дає можливість порівнювати між собою декілька системно зв'язаних вибірок і визначити, чи існують між ними статистично вірогідні відмінності та яка ймовірність цих відмінностей. Спільною рисою всіх дисперсійних моделей є те, що у них перевіряється дія деякого загального фактора (в багатофакторному аналізі – дія одночасно кількох взаємопов'язаних факторів) на об'єкт (техноекосистему).

І накінець, третьою важливою групою показників аналізу варіаційного ряду є **характеристики форми розподілу**. Якщо безкінечно зменшувати інтервал варіаційного ряду, то з часом гістограма розподілу перетвориться на плавну криву, яка характеризуватиме залежність частоти реалізації події від величини досліджуваної ознаки. Таку криву називають **функцією щільності розподілу**, або просто **щільністю**, або **розподілом**. Основними характеристиками форми розподілу є число вершин розподілу, асиметрія та ексцес.

Число вершин. Вершина кривої розподілу, по суті, є модою. Розподіл з однією вершиною називається **унімодальним** (мономодальним), з двома – **бімодальним**, з багатьма вершинами – **мультимодальним**.

Асиметрія. Деякі криві розподілу (наприклад, при нормальному розподілі) симетричні відносно вертикальної лінії, що проходить через моду. Іноді одна сторона кривої більш полого ніж інша. В такому випадку кажуть про **асиметрію** (скошеність) розподілу. Асиметрія визначається за формулою:

$$A_s = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 \cdot f}{\sigma^3 \sum f} \quad (1.22)$$

При нормальному розподілі $A_s = 0$, при правосторонній симетрії $x > \bar{x}$ для більшості варіант, тому $A_s > 0$, а при лівосторонній симетрії навпаки – $A_s < 0$ (рис. 1.4). Іноді правосторонню симетрію називають ще *додатньою*, а лівосторонню – *від’ємною*.

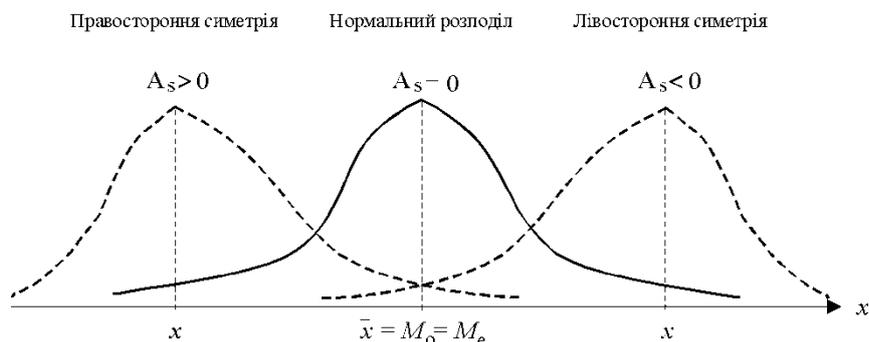


Рис.1.4. Асиметрія розподілу

Якщо розподіл симетричний, то для нього можна розрахувати показник *ексцесу*:

$$E_x = \frac{\sum (x - \bar{x})^4 \cdot f}{\sigma^4 \sum f} \quad (1.23)$$

Для вищерозглянутого випадку нормального розподілу $E_x = 0$, при $E_x > 0$ маємо *гостровершинний* розподіл, при $E_x < 0$ – *плосковершинний* розподіл. Додатнє значення E_x вказує на те, що крива щільності має в околі моди (медіани) більш високу і гострішу вершину. В цьому випадку кажуть про *додатній* ексцес у порівнянні із нормальною кривою. Від’ємне значення E_x (*від’ємний* ексцес) зумовлює нижчий і пологіший характер вершини у порівнянні із нормальним розподілом (рис. 5).

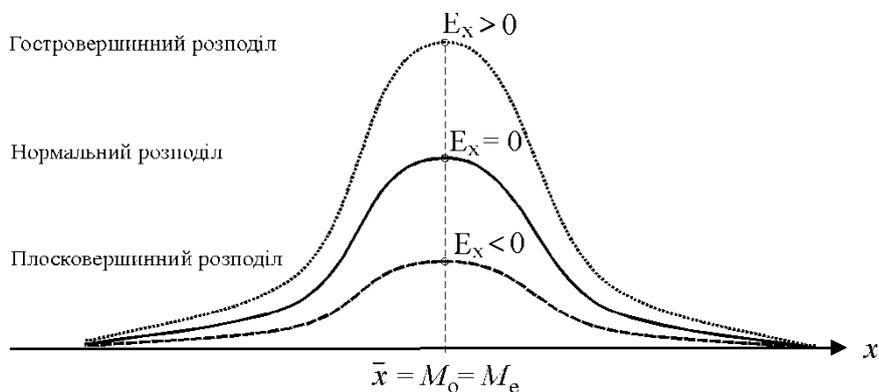


Рис. 1.5. Ексцес розподілу

Проаналізувавши таким чином варіаційний ряд, тобто визначивши його характеристики центру розподілу, розміру варіації та форми розподілу, можна приступити до моделювання ряду розподілу.

Моделювання ряду розподілу теж здійснюється у три етапи:

- дослідження загальних характеристик розподілу;
- вирівнювання (підгонка) емпіричного розподілу за теоретичною кривою розподілу;
- перевірка узгодженості теоретичного розподілу емпіричному.

Дослідження загальних характеристик розподілу включає в себе аналіз варіаційного ряду. Іншими словами початковий етап побудови моделі розподілу полягає у визначенні середніх значень варіант варіаційного ряду та окремих інтервалів інтервального ряду, моди, медіани, середнього квадратичного відхилення, дисперсії, асиметрії та ексцесу розподілу. Після цього здійснюється побудова графічного зображення розподілу у вигляді одного із типів графіків (рис. 1).

На наступному етапі моделювання вибирається вид теоретичного розподілу, а потім

здійснюється вирівнювання емпіричного ряду до вибраного виду теоретичного розподілу. Теоретичний розподіл відображає лише загальні закономірності розподілу, що проявляються у вигляді певних внаслідок дії лише основних факторів. Тобто теоретичний розподіл описує в генералізованому аналітичному вигляді функціональний зв'язок між значеннями варіант ряду та їх частотами. В математичній статистиці та теорії ймовірності відомо багато стандартних видів розподілу: нормальний розподіл, біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, Бета-розподіл, розподіл Коші, розподіл хі-квадрат, логнормальний розподіл, розподіл Стюдента тощо. В спеціальній літературі [,] можна взяти детальніше про дані розподіли. Ми зупинемось на розгляді лише перших трьох розподілів, оскільки саме вони є найбільш вживаними.

Нормальний розподіл визначає щільність розподілу безперервної випадкової величини для значення варіант:

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1.24)$$

де $P(m)$ – щільність розподілу (іноді це ще називають диференціальною функцією Лапласа), t – нормоване відхилення ($t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$), σ – стандартне (середнє квадратичне відхилення).

Він можливий, коли на значення варіант впливає велика кількість незалежних випадкових факторів і жоден із них не є жорстко домінуючим для даної ознаки. Нормальний розподіл описується симетричною кривою (рис. 4) і володіє рядом властивостей, що роблять його практично найбільш вживаним у статистиці. Так зокрема, площа, обмежена кривою щільності розподілу, дає загальну ймовірність реалізації події, що дорівнює 1, а площа під кривою між двома фіксованими точками пропорційна ймовірності появи точок, що знаходяться в проміжку між ними. Звідси, чим менше стандартне відхилення, тим гостріший пік кривої розподілу і тим більша кількість точок розміщуватиметься поблизу середнього значення.

Це дозволяє оцінити ймовірність даної події: 68,26% площі під кривою потрапляє в інтервал від $\bar{x} - \sigma$ до $\bar{x} + \sigma$, 95,44% площі зосереджено між $\bar{x} - 2\sigma$ і $\bar{x} + 2\sigma$, а 99,73 – між $\bar{x} - 3\sigma$ і $\bar{x} + 3\sigma$. Крива нормального розподілу асимптотично наближається до осі x і для того, щоб заповнити весь простір під нею потрібна величезна кількість емпіричних спотережень. Але, як впливає із вищесказаного, за межами інтервалу від $\bar{x} - 4\sigma$ до $\bar{x} + 4\sigma$ лежить настільки мала частина площі, що ймовірностями, які не вкладаються в даний інтервал на практиці найчастіше нехтують.

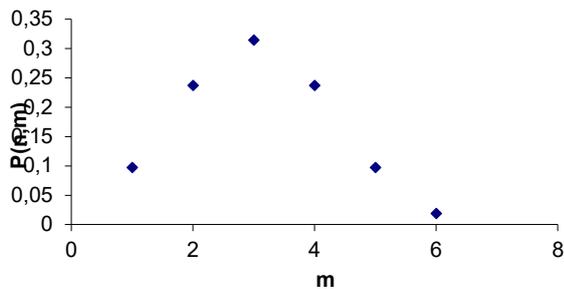
Біноміальний розподіл поряд із нормальним теж належить до найбільш простих і застосовуваних розподілів. За біноміальним законом ймовірність настання певної події m разів при n незалежних спробах визначається за формулою:

$$P_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, \quad (1.25)$$

де p – ймовірність реалізації певної події; m – частота її реалізації; n – загальна кількість подій.

Біноміальний розподіл в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля найчастіше застосовується, коли потрібно виявити закономірності розподілу ймовірності прояву двох взаємовиключаючих екологічних явищ при заданому рівні ймовірності p . Типовий приклад: нехай в басейні річки знаходиться певне промислове підприємство. За рік на ньому виникає 6 аварійних ситуацій із скидом забруднених стічних вод у річку. Усі ці скиди забруднених вод різні за розмірами і екологічною шкодою. В результаті деяких із таких скидів відбувається розчинення забруднюючих речовин у річковій воді і забруднення річки цими речовинами до концентрації, що перевищує ГДК. В цьому випадку позначимо кількість аварійних ситуацій через n , а кількість таких скидів, що призвели до забруднення води річки до рівня, вище ГДК – m . В таблиці 3 наведено результати розрахунку ймовірностей за біноміальним законом при $p = 0,5$; $n = 6$. Як видно з рис. 6.. графік біноміального розподілу є дискретним.

Таблиця 1.3. Біноміальний розподіл ($p = 0,5$; $n = 6$).



m	P_m^n
1	0,097
2	0,237
3	0,314
4	0,237
5	0,097
6	0,019

Рис. 1.6. Графік біноміального розподілу

Розподіл Пуассона являє собою по суті граничний випадок біноміального розподілу, коли ймовірність прояву явища дуже мала, а загальний розмір вибірки – великий. Ним користуються, зазвичай, при описі частот розподілу дуже рідких подій, наприклад, катастрофічних повеней чи паводків за довгого періоду спостережень. Щільність розподілу задається співвідношенням:

$$P_m = \frac{\mu^m \cdot e^{-\mu}}{m!}, \quad (1.26)$$

де μ – середнє число подій, яке визначається як добуток кількості варіант на ймовірність їх прояву в одноразовій спробі ($\mu = n \cdot p$); m – частота прояву події.

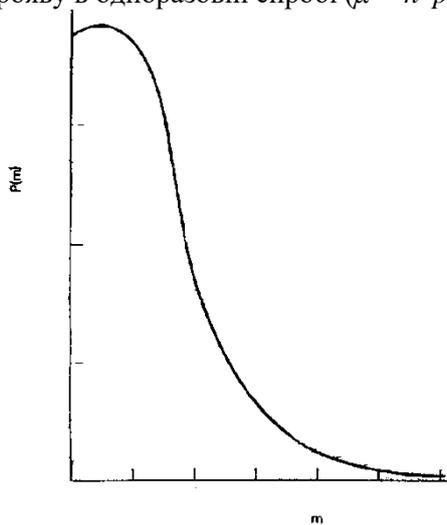


Рис. 1.7. Щільність розподілу Пуассона

Як видно з графіка на рис. 1.7, розподіл Пуассона дуже близький до асиметричного біноміального. Він застосовується при аналізі рідких і незалежних одне від одного явищ в часі і просторі. Так, наприклад, даний вид розподілу використовується при побудові моделі частоти прояву катастрофічних паводків. До Пуассонівського наближається також і розподіл мікроелементів в зразку ґрунту. Аналогічний розподіл успішно застосовується при гідрохімічному аналізі природних вод, коли мова не йде про детерміновані моделі розсіювання забруднень, оскільки при їх побудові використовуються зовсім інші методи.

Наступним етапом є **вирівнювання (підгонка) емпіричного розподілу за теоретичною кривою розподілу**. Вона зводиться до порівняння частот фактичного розподілу з відповідними теоретичними частотами. Теоретичні частоти розраховуються за формулами (1.24-1.26). Наприклад, для нормального розподілу вони розраховуються за співвідношенням:

$$f_{теор.} = P(m) \cdot \frac{n \cdot h}{\sigma}, \quad (1.27)$$

де $P(m)$ – значення диференційної функції Лапласа (розраховується за формулою (24)); n – загальне число спостережень, h – ширина інтервалу; σ – стандартне (середнє квадратичне) відхилення.

Після цього приступають до наступного етапу моделювання рядів розподілу – **перевірки узгодженості теоретичного розподілу емпіричному**. Вона здійснюється за допомогою **критеріїв узгодженості**. Їх існує доволі багато – критерій Пірсона (χ^2 , типу I, III, IV, VI), Романовського, Колмогорова, Ястремського, так званий критерій “ $n\omega^2$ ” і т.д. У зв’язку із напрямком і задачами нашої роботи зупинимось лише на критеріях Пірсона χ^2 і Колмогорова.

Англійський вчений **К. Пірсон** запропонував **критерій**, статистичну характеристику якого розраховують за формулою:

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f')}{f'}, \quad (1.28)$$

де f і f' – відповідно фактичні і теоретичні частоти.

За спеціальними таблицями визначають ймовірність досліджуваного значення χ^2 залежно від числа ступенів свободи (вільності) – $k = m - 3$, де k – число ступенів свободи, а m – кількість інтервалів (груп) і заданому рівні значимості, яка в західній спеціальній літературі та комп'ютерних програмах позначається *p-level*. Рівень значимості приймається як правило 0,05 або 0,01.

Якщо розраховане за формулою (28) значення критерію менше за табличне, то при прийнятому рівні значимості відхилення між фактичними і розрахованими частотами несуттєве і спричинене випадковими факторами, а отже емпіричний розподіл відповідає теоретичному.

Критерій Колмогорова розраховується за наступною формулою:

$$\lambda = \frac{\max |S_f^{теор.} - S_f^{емп.}|}{\sqrt{n}} \quad (1.29)$$

λ – критерій Колмогорова, $S_f^{теор.}$ і $S_f^{емп.}$ – сума накопичених теоретичних і емпіричних частот в долях одиниці, n – сума емпіричних частот.

Значення даного критерію теж табульовані []. За заданого рівня значимості $\alpha = 1 - k(\lambda)$ по цих таблицях визначаються критичні значення λ_α . Якщо розраховане значення критерію λ менше критичного λ_α , то приймається гіпотеза про відповідність емпіричного розподілу теоретичному.

Критерій Колмогорова використовується для перевірки відповідності при достатньо великому n , але сучасні дослідження довели, що вже при $n \geq 20$, розподіл статистики вже практично не залежить від n .

Даний критерій узгодженості визначається фактично по одній точці, а тому в деяких випадках може не відображати загальну узгодженість теоретичного та емпіричного розподілу. Крім того найбільша різниця накопичених теоретичних та емпіричних частот, як правило, спостерігається в середній частині кривої розподілу. Тому судження про співпадання теоретичних та емпіричних розподілів в крайових частинах (а іноді саме це потрібно в практичних розрахунках) потрібно виносити дуже обережно.

1.2. Аналіз структури та дослідження взаємозв'язків

В моделюванні і прогнозуванні велика увага приділяється аналізу взаємозв'язків між різноманітними природними та техногенними процесами та явищами. Більшість екологічних процесів формується ланцюгом причинно-наслідкових явищ, що змінюються в часі і просторі. Для вивчення цих процесів необхідно встановити їх причини, рушійні сили або джерела, тенденції розвитку. При цьому виникає необхідність в дослідженні залежностей, що пов'язують досліджувані процеси між собою та з іншими процесами і явищами. Наприклад, для моделювання забруднення річкових вод важливим питанням є коливання стоку річки (витрати води). При розрахунках і прогнозах стоку слід дослідити і з'ясувати зв'язки між коливаннями водності річки та коливанням шару опадів (дощових і снігових), температури повітря, випаровуваності з поверхні суші і водойм, запасів води в сніговому покриві і т.д.

Задачі по дослідженню структури та взаємозв'язків екологічних процесів дуже різноманітні. Умовно їх можна розділити на дві групи:

- задачі, пов'язані із вивченням причин або факторів розвитку процесів в часі і просторі;
- задачі, пов'язані із визначенням конкретних значень або тенденцій розвитку даного процесу в майбутньому.

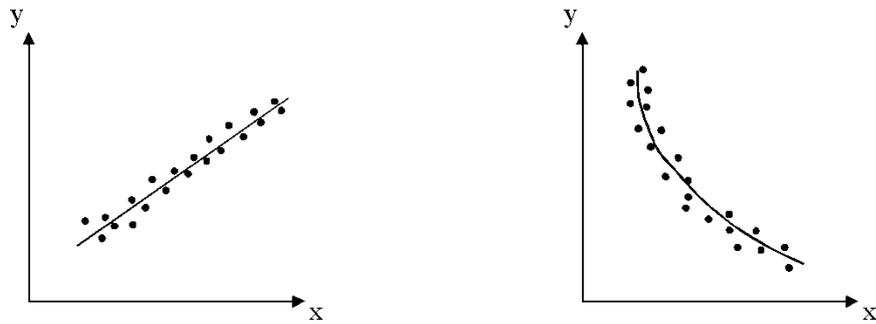


Рис. 1.8. Графіки прямолінійного та криволінійного зв'язку

Слід зауважити також, що задачі дослідження залежностей при моделюванні, взагалі то кажучи, не є чисто математичними задачами. Оскільки математичний аналіз в даному випадку обов'язково повинен супроводжуватись фізичним аналізом сутності екологічних процесів, відсутність останнього ж може спричинити серйозні прорахунки, похибки, а іноді й просто парадоксальні результати.

Взаємозв'язок досліджуваних процесів оцінюється по відповідності змін їх значень в часі і просторі. За формою графіка ця залежність може бути *прямолінійною* або *криволінійною* (рис. 8). Прямолінійні залежності вивчені краще, але в природі зустрічаються рідше. За тісністю зв'язку або ступенем визначеності одного із співставлюваних процесів відносно іншого, зв'язки можуть бути *функціональні* і *стохастичні*. Окремим випадком даної класифікації є *відсутність зв'язку* між досліджуваними процесами.

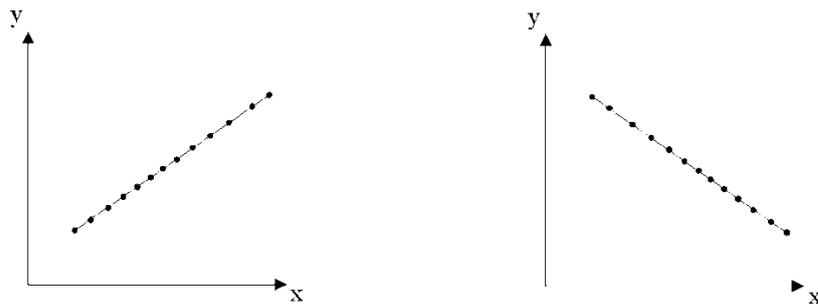


Рис. 1.9. Графіки зв'язку функціонально залежних величин

Функціональні зв'язки. Іноді залежність між досліджуваними величинами буває настільки тісною, що знаючи значення однієї із величин можна вказати точні значення іншої. Такі взаємозв'язки називаються функціональними. Наприклад, при моделюванні процесів забруднення повітря та масопереносу в атмосфері, для розуміння фізичної суті процесу, потрібно знати основні закони термодинаміки. Один із цих законів пов'язує тиск (P), температуру (T) і об'єм (V) газу:

$$P = \frac{R \cdot T}{V} \quad (1.30)$$

За цим законом кожному індивідуальному значенню V при фіксованих значеннях R і T відповідає лише одне значення P . Якщо нанести відповідні пари значень співставлюваних величин на графік в декартових координатах (рис. 1.9) у вигляді точок, то утворена група точок лежатиме строго на одній лінії, тобто кожному значенню V відповідатиме певне значення P і навпаки.

Такі залежності зустрічаються, як правило, в технічних науках, у фізиці, екологічні явища виявляються пов'язані функціональною залежністю доволі рідко.

Відсутність зв'язку. Досліджувані екологічні процеси і явища іноді бувають непов'язані одне з одним, тобто зміна одного із них відбувається незалежно від зміни іншого. Випадкова величина Y називається незалежною від випадкової величини X , якщо закон розподілу Y не залежить від того, яке значення значення набуває X .

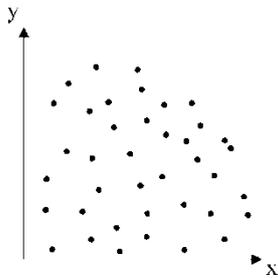


Рис. 1.10. Графік зв'язку незалежних величин

Графік зв'язку незалежних величин (рис. 1.10) являє собою поле точок, у якому кожному значенню X відповідає з відповідною щільністю весь діапазон можливих значень Y і навпаки.

Ймовірнісна (стохастична) залежність. Зустрічається в екології найчастіше. Якщо Y пов'язане із X стохастичною залежністю, то знаючи значення X не можна вказати точне значення Y , а можна вказати лише закон розподілу величини Y , який залежить від величини X .

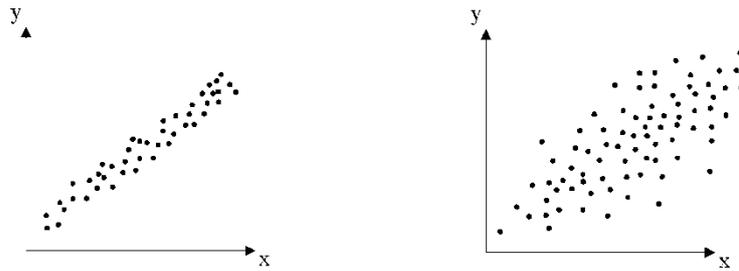


Рис. 1.11. Графіки зв'язку стохастично залежних величин із високою та низькою щільністю зв'язку.

На рис. 1.11 зображено графік стохастичної залежності більшої та меншої щільності зв'язку. Як видно із рисунку, точки кожної пари значень ($X; Y$) розміщуються в полі графіка ніби відносно якоїсь лінії. При цьому кожному значенню X відповідає своя смуга значень Y . Разом із зміною X змінюється середнє із можливих значень Y при даному X .

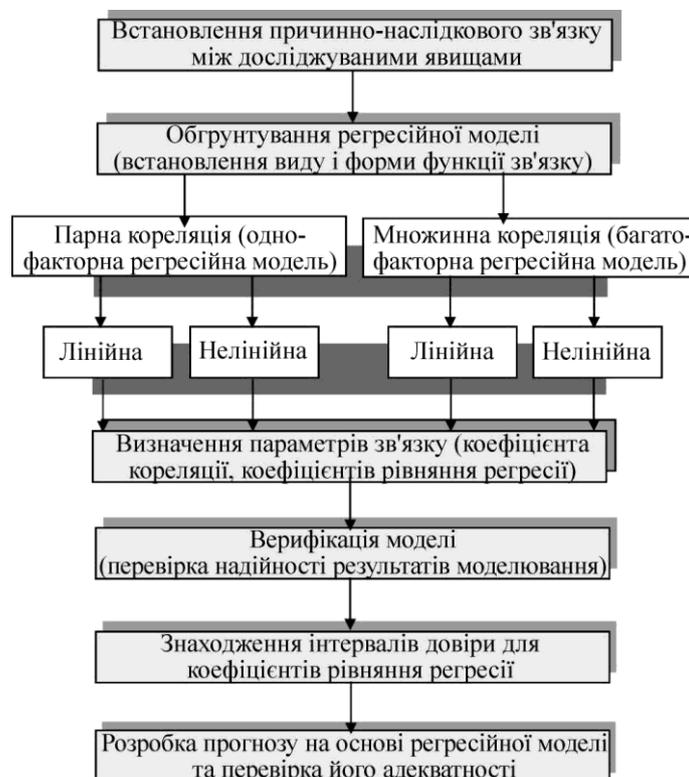


Рис. 1.2. Алгоритм реалізації моделі кореляційно-регресійного зв'язку
 Стохастичний зв'язок між змінними проявляється, як правило, тоді, коли поряд із факторами,

які впливають або на один або на інший процес, існують фактори, що впливають спільно як на перший, так і на другий процес.

По мірі збільшення щільності зв'язку форма графіка наблизитиметься до графіка функціональної залежності. Таким чином, функціональна залежність є крайнім випадком найбільш тісної стохастичної (ймовірнісної) залежності. Полярним випадком є повна незалежність змінних. Між цими граничними випадками розміщуються всі градації ймовірнісної залежності – від найбільш сильної до найслабшої.

Регресійна модель дослідження взаємозв'язку між екологічними процесами. Для дослідження взаємозв'язку двох екологічних процесів або явищ найчастіше застосовується математична модель у вигляді рівняння регресії. Така модель називається регресійною або кореляційно-регресійною. Процес її побудови в загальному складається з двох етапів:

- встановлення на основі великої кількості спостережень того, як змінюється в середньому функція Y в залежності від зміни одного або декількох її головних аргументів (іншими словами – визначення форми зв'язку і знаходження рівняння зв'язку двох змінних величин);
- визначення ступеня взаємозв'язку двох досліджуваних явищ (якщо ці явища взаємопов'язані) або ступеню впливу головних досліджуваних факторів на досліджуваний вплив (якщо ці зв'язки носять причинно-наслідковий характер).

Однофакторна лінійна регресійна модель. Зупинимось детальніше на першому етапі дослідження взаємозв'язку двох змінних величин – **встановленні рівняння взаємозв'язку в лінійному вигляді**. Як відомо з попередніх розділів, загальний вигляд лінійного зв'язку:

$$\bar{y} = ax + b, \quad (1.31)$$

де \bar{y} – середнє із можливих значень Y при даному x . Функція, що виражає зв'язок між значенням аргументу і умовним середнім арифметичним досліджуваної залежної змінної, називається **рівнянням лінії регресії**. До даного рівняння, поряд із змінними, входять і коефіцієнти – a і b . Зміст цих коефіцієнтів детально розглядався в розділі, присвяченому використанню елементарних функцій в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля. Так, зокрема, коефіцієнт a називається ще **кутовим коефіцієнтом** і характеризує нахил прямої лінії (графіка функції) до осі абсцис. Математичний зміст цього коефіцієнта полягає у тому, що він характеризує нахил лінії графіка функції до осі абсцис і дорівнює: $k = \text{tg } \alpha$. Коефіцієнт b називають **вільним членом рівняння**. Він показує довжину відрізка, який відсікає лінія графіку від початку координат. Якщо рівняння функції не містить коефіцієнта b , то її графік пройде через початок координат.

Для знаходження параметрів парної регресії застосовують **метод найменших квадратів** (МНК). Суть методу полягає в тому, що сума квадратів відхилень x_i від їх середньої \bar{x} є величиною мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min \quad (1.32)$$

За цим методом розрахований теоретичний розподіл має максимально точно відповідати емпіричному, тобто точки лінії регресії, розраховані теоретичним шляхом, повинні бути отримані таким чином, щоб сума їх відхилень від емпіричних (дослідним шляхом добутих) значень була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min \quad (1.33)$$

Знайдемо параметри a і b для (1.31) за допомогою методу найменших квадратів. Позначимо різницю фактичних і розрахованих значень через S :

$$S = y_i - \bar{y}(x_i) = y_i - ax_i - b \quad (1.34)$$

Тоді:

$$S^2 = (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min \quad (1.35)$$

Для знаходження мінімуму функції S^2 від параметрів a і b слід визначити частинні похідні по a і b . Вони відповідно дорівнюють:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2(\sum xy - a \sum x^2 - b \sum x) \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2(\sum y - a \sum x - bn) \end{cases} \quad (1.36)$$

Як відомо, функція досягає мінімуму якщо її перша похідна дорівнює 0. Прирівнявши частинні похідні (1.36) до нуля, отримаємо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими (a і b). Цю систему іноді ще називають **нормальною системою рівнянь** або **системою Гаусса**:

$$\begin{cases} a \sum x^2 + b \sum x = \sum xy \\ a \sum x + bn = \sum y \end{cases} \quad (1.37)$$

Розв'язавши цю систему отримаємо:

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ b = \frac{\sum y - a \sum x}{n} = \bar{y} - a \bar{x} \end{cases} \quad (1.38)$$

Коефіцієнти лінійної регресії розраховуються за ретроспективний період спостережень для вибіркової сукупності. Тому для доведення репрезентативності вибірки слід виконати оцінку значимості коефіцієнтів регресії, тобто довести, що лінійний зв'язок у вибірковій сукупності свідчить про такий же зв'язок у генеральній сукупності. Значимість коефіцієнта лінійної регресії перевіряють за допомогою t -критерію Стьюдента. За таблицею t -розподілу Стьюдента знаходять величину $t_{\frac{\alpha}{2}, k}$ з $k =$

$n - 2$ ступенями свободи і рівнем значимості α .

Розрахункове значення критерію знаходять за формулою:

$$t_{розр} = |a| \cdot \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} \cdot (n - 2)} \quad (1.39)$$

Якщо $t_{розр} > t_{крит}$, то коефіцієнт регресії вважається значимим, тобто характер зв'язку у вибірковій сукупності відповідає генеральній.

Але випадки лінійної регресії зустрічаються в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля доволі рідко. Частіше лінійна регресія використовується для лінійної апроксимації існуючих екологічних закономірностей і взаємозалежностей.

Однофакторна нелінійна регресійна модель. В окремих випадках використати таку апроксимацію неможливо або ж недоцільно. Тоді досліджується **модель парної нелінійної регресії**. Методика розрахунку коефіцієнтів парної нелінійної регресії аналогічна розглянутій вище. В спеціальній літературі вона описана доволі ґрунтовно. У зв'язку із напрямом та специфікою нашої роботи ми опустимо їх виведення і наведемо лише кінцеві формули для розрахунку коефіцієнтів парної нелінійної регресії у вигляді таблиці 1.4.

На наступному етапі на основі розрахунку параметрів рівняння регресії (лінійної чи нелінійної) вирішуються задачі, пов'язані із **визначенням конкретних значень або тенденцій розвитку даного процесу в майбутньому**. **Прогнозуванням** називається наукове передбачення ймовірнісних шляхів розвитку явищ і процесів для більш-менш віддаленого майбутнього. Проміжок часу від моменту, для

якого є останні статистичні дані про досліджуваний об'єкт, до моменту, до якого належить прогноз, називається *періодом упередження*.

Суть прогнозування на основі регресійної моделі полягає у екстраполяції на майбутнє розрахованих за попередні періоди залежностей. Такий метод прогнозування виходить із збереження загальної тенденції розвитку явищ (процесів) у часі. На практиці прогноз показника отримують підстановкою у здобуте рівняння конкретного значення детермінуючого (визначаючого) фактора. Результатом прогнозу є точкова оцінка середнього значення функції при заданому рівні прояву (реалізації) фактора.

Середнє значення прогнозу показника (вислідної ознаки) $\bar{y}_{np.}$ при значенні детермінуючого фактора $\bar{x}_{np.}$, відповідно до рівняння лінійної регресії, визначається за формулою:

$$\bar{y}_{np.} = a\bar{x}_{np.} + b \quad (1.40)$$

Окремим важливим питанням є достовірність прогнозу. Для того аби довести достовірність прогнозу слід визначити межі його довірчого інтервалу $\Delta\bar{y}_{np.}$:

$$\Delta\bar{y}_{np.} = t_{a,k} \cdot S \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_{np.} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.41)$$

де $t_{a,k}$ – t -розподіл Стюдента з $k = n - 2$ ступенями свободи і рівнем значимості α ; n – кількість варіант (спостережень), S – точкова оцінка величини дисперсії σ .

Багатофакторна регресійна модель. Природа являє собою динамічну, функціональну і поліваріантну систему, що об'єднана в єдине ціле надзвичайно складним сплетінням різноманітних постійно взаємодіючих природних факторів. Доволі часто в природі зустрічаються випадки, коли значення параметрів техноекосистеми формуються під впливом не однієї а кількох різних факторних ознак. При цьому жодна із даних ознак не справляє вирішального впливу на досліджувані параметри системи, але їх спільний вплив є відчутним. В такому випадку для дослідження структури взаємозв'язків у ТЕС використовують модель багатофакторної регресії.

Найскладнішим моментом багатофакторного регресійного моделювання є те, що, по-суті, досліджується зв'язок між значенням залежної змінної та довільною комбінацією незалежних (факторних) змінних. У зв'язку із такою поліваріантністю, складністю побудови моделі багатофакторної регресії та вибору кінцевої функції найчастіше для багатофакторного регресійного аналізу використовуються *метод виключень*, *покроковий регресійний аналіз* і *метод всіх можливих регресій*.

Суть *методу виключення* полягає в тому, що будують рівняння, яке містить всі фактори. Потім для кожного фактора обчислюють статистику часткового F -критерію, тобто відношення різниці суми квадратів всіх факторів і всіх крім останнього фактора до дисперсії часткової величини цієї моделі. Якщо мінімальне значення часткового F -критерію менше за критичне (взяте із таблиці), то даний фактор виключається із моделі. Процедура продовжується поки не будуть виключені всі фактори, що відповідають даній умові.

Покроковий регресійний аналіз являє собою зворотну процедуру. Спочатку у модель включається фактор, що має найбільший коефіцієнт кореляції із залежною змінною. Потім до даного рівняння додають фактори із найменшими коефіцієнтами кореляції доти, доки не переберуть всі фактори. Контроль адекватності моделі здійснюється за допомогою часткового F -критерію.

Розглянемо детальніше *метод всіх можливих регресій*. На *першому етапі* цього методу встановлюють які фактори слід включати в модель. Це доволі складна процедура, яка вимагає глибокого розуміння суті модельованого процесу. З одного боку, всі фактори включені до моделі повинні мати статистичний зв'язок із результируючим показником. З іншого боку, рівняння множинної регресії адекватно відображає модельоване явище лише тоді, коли фактори є кореляційно незалежними. Якщо між факторами існує функціональний або дуже близький до нього статистичний зв'язок, то до моделі включається лише один із них, а всі інші виражаються через нього. а другому етапі здійснюється математико-статистичний аналіз факторів шляхом розрахунку парних та множинного коефіцієнтів кореляції (методика їх визначення буде наведена дещо згодом).

Таблиця 1.4. Розрахунок коефіцієнтів парної нелінійної регресії

Рівняння регресії	Графік рівняння	Система рівнянь для визначення коефіцієнтів
$y = ax^2 + bx + c$		$\begin{aligned} a \sum x^2 + b \sum x + cn &= \sum y \\ a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x &= \sum xy \\ a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 &= \sum yx^2 \end{aligned}$
$y = kx^m$		$\begin{aligned} n \lg k + m \sum \lg x &= \sum \lg y \\ \lg k \sum \lg x + m \sum \lg^2 x &= \sum \lg x \sum \lg y \end{aligned}$
$y = a \cdot \lg x + b$		$\begin{aligned} a \sum \lg x + bn &= \sum y \\ a \sum \lg^2 x + b \sum \lg x &= \sum y \lg x \end{aligned}$
$y = a/x + b$		$\begin{aligned} a \sum \frac{1}{x} + bn &= \sum y \\ a \sum \frac{1}{x^2} + b \sum \frac{1}{x} &= \sum \frac{y}{x} \end{aligned}$

Рівняння лінійної багатofакторної регресії в загальному випадку має вигляд:

$$\bar{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m \quad (1.42)$$

За методом найменших квадратів:

$$S = \sum [y - (b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m)]^2 \rightarrow \min \quad (1.43)$$

Для оцінки значимості коефіцієнтів регресії користуються *t*-критерієм:

$$t_{розр}^i = \frac{b_i}{\sigma_{b_i}}, \quad (1.45)$$

де σ_{b_i} – середня квадратична похибка *i*-го коефіцієнта регресії.

За вибраного рівня значимості α і $V = n - m - 1$ ступенями вільності знаходимо $t_{крит.}$ Якщо $t_{розр.} > t_{крит.}$, то коефіцієнт рівняння регресії b_i слід вважати значимим і його можна використати для аналізу впливу *i*-тої факторної ознаки на вислідну ознаку, інакше фактор слід виключити з моделі. У такий спосіб відбувається відсіювання неістотних факторних ознак з погляду їх впливу на вислідну ознаку. Фактори, які залишилися, увійдуть в модель множинної регресії.

Наступним етапом побудови кореляційно-регресійна моделі дослідження взаємозв'язку між екологічними процесами є визначення ступеня взаємозв'язку двох досліджуваних явищ (якщо ці

явища взаємопов'язані) або ступеню впливу головних досліджуваних факторів на досліджуваний вплив (якщо ці зв'язки носять причинно-наслідковий характер). Найчастіше для кількісного визначення ступеня взаємозв'язку використовують **коефіцієнт кореляції**:

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}, \quad (1.46)$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

- якщо r набуває значення, близьке до -1 , то між факторами існує щільний обернений зв'язок;
- якщо $r = 0$, зв'язок відсутній; якщо r близьке до $+1$, то між факторами існує щільний прямий зв'язок;
- якщо $|r| = 1$, то між досліджуваними ознаками існує функціональний зв'язок;
- чим ближче значення $|r|$ до 1 , тим вища щільність зв'язку між ознаками.

Для більш приблизної оцінки ступеня взаємозв'язку між досліджуваними ознаками використовують коефіцієнти Фехнера і Спірмена. **Коефіцієнт Фехнера** розраховують за формулою:

$$K_\phi = \frac{C - H}{C + H}, \quad (1.48)$$

де C - число збігів знаків відхилень ознак x і y від їх середніх значень; H - число незбіжностей.

Коефіцієнт Фехнера, як і коефіцієнт кореляції, змінюється в межах від -1 до 1 . При $K_\phi = -1$ кажуть про існування узгодженої оберненої залежності, а при $K_\phi = 1$ - узгодженої прямої залежності. Якщо $K_\phi = 0$, такої залежності не спостерігається.

Коефіцієнт Спірмена іноді ще називають коефіцієнтом рангової кореляції і розраховують за формулою:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (1.49)$$

де n - обсяг сукупності, а d - різниця рангів ознак x і y .

Для розрахунку коефіцієнта Спірмена спочатку слід побудувати з вихідних варіаційних рядів **ранжовані** таблиці, тобто такі таблиці, де значення варіант розташовувались би в порядку від найменшого значення до найбільшого. Потім кожне конкретне значення варіаційного ряду заміняють його рангом (порядковим номером) і рахують різницю рангів ознак x і y .

Якщо значення $\rho = -1$, то існує обернена кореляція рангів, якщо $\rho = 1$ - пряма кореляція рангів, $\rho = 0$ - кореляція рангів відсутня.

2. Застосування методів теорії графів у гідрології

План

- 2.1. Загальні положення теорії графів
- 2.2. Приклади застосування теорії графів
- 2.3. Застосування графів у гідрології

2.1. Загальні положення теорії графів

Теорія графів — це розділ якісної геометрії, що почав бурхливо розвиватися на межі XIX—XX ст., особливо в 30-ті роки, коли була опублікована книга угорського вченого Д. Кеніга "Теорія скінчених і нескінчених графів" (Лейпціг, 1936).

Теорія графів бере початок з розв'язку знаменитим математиком Ейлером задачі про кенігсбергські мости в 1736 році. Задача виникла у пруському містечку Кенігсберг (зараз Калінінград, Російська Федерація) на річці Прегал. Мешканці Кенігсбергу полюбили прогулюватися по стежці, яка включала сім мостів через річку Прегал. Людям було цікаво, чи можуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости, побувавши в кожному лиш один раз, і повернутися в точку початку шляху (перепливати річку також заборонялось). Сім мостів з'єднували два береги річки та два островки так, як показано на рис. 2.1,а.

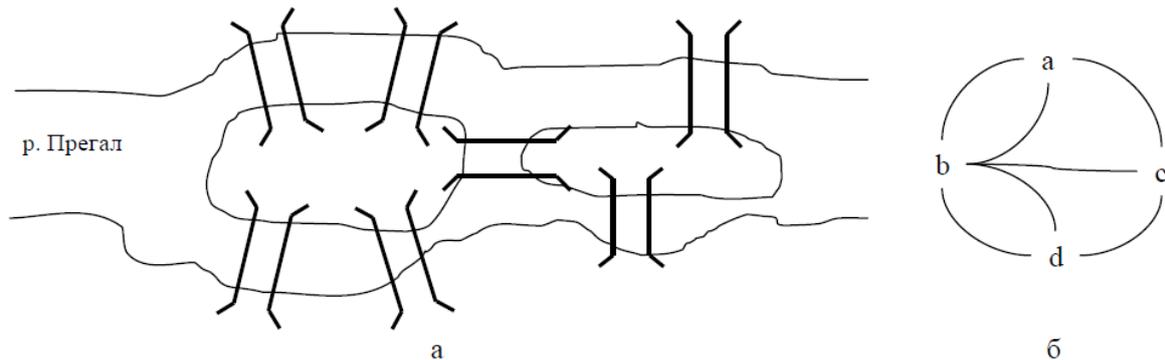


Рис. 2.1. Схема Кенігсбергських мостів та мультиграф Ейлера.

Ейлер побудував мультиграф, зображений на рис. 2.1,б. В цьому мультиграфі ділянки суші зображені як вершини, а стежки через мости — як ребра. В такому випадку задача здобуває наступне формулювання: починаючи з довільної вершини, проходячи по кожному ребру тільки один раз, повернутися у вихідну вершину. Як виявилось, ця задача не має розв'язків.

Якісна геометрія, як відомо, оперує безрозмірними величинами. Тут не використовуються ні поняття кута і одиниць його виміру (градусів), ні довжини ліній (метрів, сантиметрів). Головне в якісній геометрії — наявність просторових елементів — точок, ліній, поверхонь, об'ємів і відношень (зв'язків) між ними. Основним поняттям теорії графів є поняття графа.

Граф — це множина X і множина відношень R , заданих на X . Графічно множина X зображається точками, що називаються вершинами графа, а множина R — лініями, так званими ребрами (дугами) графа. На рис. 2.2 (а) точки 1, 2, 3, ..., 7 — вершини графа, а лінії 1-2, 2-3, 2-4, 4-5, 2-6 та ін. — його ребра.

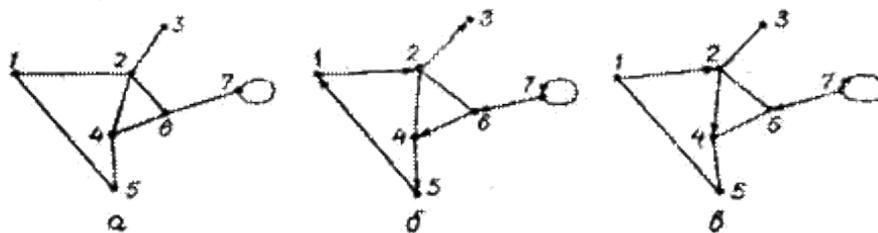


Рис. 2.2. Граф: неорієнтований (а), орієнтований (б), змішаний (в)

Ребро, яке з'єднує дві вершини графа, є інцидентним цим вершинам, а самі вершини — інцидентні ребру. Дві вершини графа іменуються суміжними; якщо вони визначають ребро графа. Два ребра іменуються суміжними, якщо вони мають спільну вершину. Вершина, інцидентна тільки одному ребру, називається висячою, а не інцидентна жодному ребру — ізольованою. Граф, утворений тільки ізольованими вершинами — це нуль-граф.

Якщо кінці ребра інцидентні одній і тій же вершині, то таке ребро називається петлею. На рис. 2.2 зображене ребро-петля, яке виходить з вершини 7 і входить у неї.

Інколи пари вершин з'єднуються не одним, а декількома ребрами. Такі графи називаються мультиграфами. Ними моделюються пари населених пунктів, що з'єднані декількома шляхами одного виду транспорту чи лініями декількох видів транспорту.

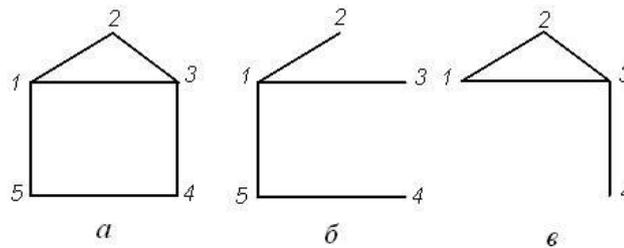


Рис. 2.3. Граф (а), його частковий граф (б), підграф (в)

Якщо порядок кінців ребер графа не береться до уваги, то такий граф називається неорієнтованим (рис. 2, а). У протилежному випадку, тобто коли пари вершин упорядковані, граф називається орієнтованим (орограф). Орієнтовані ребра — це дуги графа (рис. 2.2, б). Змішаним називається такий граф, в якому частина ребер орієнтована, а частина неорієнтована (рис. 2.2, в).

Графи бувають скінченими, якщо множина їхніх вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ є скінченою, і нескінченими, якщо ця множина змінюється від одиниці до нескінченності. Якщо граф має n вершин ($n > 1$) і кожна пара вершин з'єднана ребром, він називається повним. У протилежному випадку маємо неповний граф.

Існують поняття доповнення до графа, часткового графа і під-графа.

Доповнення до графа — це такий граф, ребра якого разом з цим графом утворюють повний граф (позначається через G).

Частковим називається граф, ребра якого є підмножиною цього графа і множина вершин якого збігається з множиною вершин цього графа (рис. 2.3, б).

Підграфом називається граф, вершинами якого є підмножина вершин певного графа, а ребрами — усі ребра, обидва кінці яких інцидентні цим вершинам (рис. 3, в). Так, граф на рис. 2.3 (б) є підграфом графа на рис. 2.3 (а), а цей останній є його надграфом.

Коли задається або відшукується певна послідовність ребер (дуг), тоді йдеться про маршрути — ланцюги і шляхи відповідно на неорієнтованому і орієнтованому графах, а також про цикли і контури теж відповідно на цих графах.

Ланцюг — така послідовність ребер неорієнтованого графа, в якій кінець одного ребра є початком іншого, а початкова і кінцева вершини не збігаються. Аналогічно визначається шлях на орографі. Перша у ланцюгу чи шляху вершина називається початковою, остання — кінцевою, всі інші — проміжними.

Ланцюги чи шляхи можуть бути простими і складними, елементарними і неелементарними. Прості вони в тому випадку, коли усі ребра (дуги) різні. В протилежному випадку — це складні ланцюги чи шляхи. Якщо у ланцюгу чи шляху жодна вершина не повторюється двічі, то він називається елементарним, і навпаки, ланцюг, який два або більше разів проходить через певну вершину, називається неелементарним.

Цикл — це ланцюг, який починається і закінчується однією і тією ж вершиною неорієнтованого графа. Аналогічно визначається контур орографа. Цикли і контури також бувають прості і складні, елементарні і неелементарні. Це залежить від виду ланцюгів, які їх утворюють.

На рис. 2.2, (а) маршрут 1-2, 2-6, 6-4, 4-5 є ланцюгом, а маршрут 1-2, 2-6, 6-4, 4-5, 5-1 — циклом. На рис. 2.2, (б) маршрут 1-2, 2-6, 6-4, 4-5 є шляхом. Цей же шлях плюс дуга 5-1 утворюють контур.

Ланцюг (шлях), цикл (контур) мають довжину, яка вимірюється кількістю ребер між початковою і кінцевою вершинами. Довжина ланцюга, що проходить через вершини 1-2-6-4-5 (рис.

2.2, а), дорівнює чотирьом, а довжина циклу 1-2-6-4-5-1 - п'ятьом.

Довжина найкоротшого ланцюга між певними двома вершинами графа називається відстанню між ними. Якщо для кожної вершини підрахувати відстань до найбільш віддаленої від неї вершини, то найменше з цих чисел називатиметься радіусом, а найбільше — діаметром графа.

Поняття ланцюга чи шляху вихідне для розуміння фундаментального поняття зв'язаності графа.

Дві вершини графа називаються зв'язаними, якщо існує ланцюг чи шлях з кінцями в цих вершинах. Тоді неорієнтований граф вважається зв'язаним, якщо будь-яка пара його вершин зв'язана.

Для орієнтованих графів існує поняття дуже і малозв'язаних графів. Дуже зв'язаний — це орограф, в якому для будь-якої пари вершин існує шлях, що з'єднує їх. У протилежному випадку орограф малозв'язаний.

Графом-деревом називається довільний зв'язаний граф, який не має циклів (див. рис. 2.3, б). Ребра такого графа іменуються вішками, а ребра графа — доповнення до цього графа-дерева — хордами.

Якщо граф має багато вершин і ребер, то він втрачає оглядовість. З таким графом важко працювати: у підрахунках трапляються помилки. Тоді відображають граф у вигляді матриці М. Найбільш поширеними є такі матриці графів: матриця суміжності відповідно вершин і ребер, матриця інциденті, матриця доступності, матриця відстаней.

Накреслимо два графи (рис.2.4), відобразивши їх матричні еквіваленти.

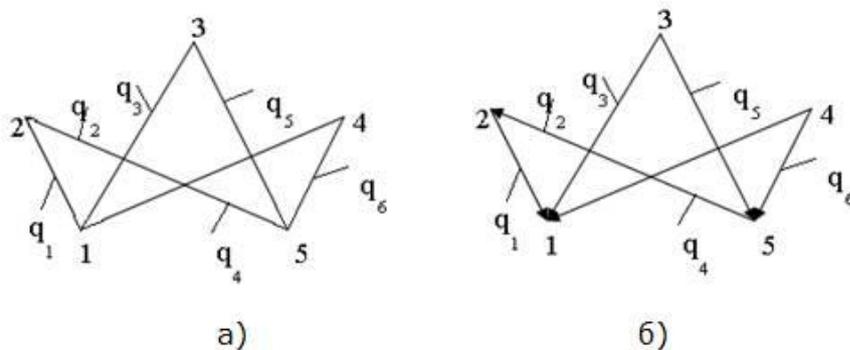


Рис. 2. 4. Неорієнтований (а) та орієнтований (б) графи з різними матрицями суміжності

Ми матимемо справу з матрицею суміжності вершин графів та матрицею відстаней. Матриця суміжності вершин графа $M_{см.в}$ – це квадратна матриця, в якій рядки і стовпчики відповідають вершинам графа. Порядок матриці збігається з кількістю вершин. При заповненні матриці на перетині рядка і стовпчика, що відповідають суміжним вершинам, ставлять 1; решту комірок заповнюють нулями. $M_{см}$ вершин для графа (рис. 2.4, а) представлена такою таблицею:

$$M_{см.в} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матриця відстаней графа $M_в$ - це квадратна матриця, в якій рядки і стовпчики відповідають вершинам графа. Її елемент показує відстань від і-тої до j-тої вершини, виміряну кількістю ребер (дуг) за найкоротшим маршрутом. Якщо в орографі шлях від вершини відсутній, то відстань дорівнює нескінченності. Матриця відстаней орографа (рис. 2.4, б) має такий вигляд:

$$M_в = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогічно визначається матриця відстаней неорієнтованого графа, хоч тут нескінченні відстані відсутні.

2.2. Приклади застосування теорії графів

Отже, граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці. Коротко окреслимо найвідоміші застосування теорії графів, які мають хоча б мінімальне значення дотичне до географії та геоєкології.

Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені транспортні мережі, інформаційні мережі, карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів, моделі ігор, генеалогічні дерева тощо. Прикладами застосування теорії графів є знаходження циклів (когнітивні карти), знаходження гамільтонових циклів (обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз – задача комівояжера), знаходження ейлерових циклів (обійти всі ребра – контроль дієздатності мережі), фарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів (політичні карти, геоінформаційні системи), знаходження центрів графа: вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графа є мінімальною ("столиць") тощо.

Під час розробки схем маршрутів та їх оптимізації застосовують математичний апарат теорії графів, тобто графоаналітичні методи. Головне завдання при цьому полягає у побудові графу логістичної організації турпродукту (туру). Щодо логістики туризму, то вершини графу можуть відображати: а) різну атрактивність туристичних об'єктів (ресурсів); б) місткість і клас готельної бази (в балах). Розглянемо приклад застосування теорії графів у логістиці туризму (рис. 2.5).

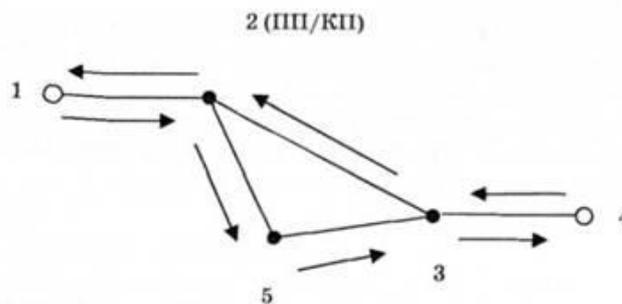


Рис. 2.5. Граф маршруту туру: 1-5 - пункти туристичного маршруту; 2 3-5 - пункти ночівлі; 1,4 - екскурсійні пункти; напрямок руху тургруп; ПП - початковий пункт маршруту; КП - кінцевий пункт маршруту

Таблиця 2.1. Показники центральності та ієрархічності графу

Показник	Вершина				
	1	2	3	4	5
Центральності	1	3	3	1	2
Ієрархічності	2	1	5	3	4

Отже, на певній території з певними туристичними ресурсами, рівнем розвитку готельної бази та транспортного сполучення визначені п'ять пунктів маршруту тургрупи. Потрібно оцінити положення кожної вершини графу. Для цього використовують показник центральності вершин графу, який обчислюють за кількістю інцидентів (кількість ребер, що виходять із вершини) (табл. 2.1). Найвищий показник центральності мають вершини 2, 3 і 5, тому вони визначаються як основні пункти маршруту; вершини 1, 4 будуть екскурсійними пунктами. Схема маршруту може мати два варіанти: 1) пункти 2, 5, 3; 2) пункти 2, 3, 5. Варіативність формування маршруту визначають за допомогою показника цілісності, який в теорії графів називається цикломатичним числом (М) і показує кількість замкнених циклів графів. Чим їх більше, тим граф цілісніший та має більше варіантів побудови схеми маршруту. Щоб оцінити граф загалом, використовують показник зв'язності, який є відношенням суми ребер графу до кількості його вершин:

$$\beta = \frac{E}{V}, \quad (2.1)$$

де β - показник зв'язності графу; E - сума ребер графу; V - кількість вершин графу.
Конфігурацію графу оцінюють за показником його форми:

$$\Pi = \frac{E}{\sigma}, \quad (2.2)$$

де Π - показник форми графу; E - сума ребер графу; σ - топологічний діаметр графу.

Отже, показник форми графу - це відношення суми ребер графу до його топологічного діаметра. Діаметр - мінімальна кількість ребер, що поєднує дві максимально віддалені вершини. Чим більший показник форми графу, тим компактнішу форму має схема туристичного маршруту. Відповідно можна застосувати показник компактності маршруту:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad (2.3)$$

де η - показник компактності маршруту; ε - периметр графу (сукупність ребер, що становлять зовнішню грань).

Тобто компактність графу визначають за відношенням периметра графу до його діаметра. Чим менше значення показника компактності, тим граф компактніший. Це означає в логістиці туризму, що тим менше часу потрібно для подолання відстані між пунктами туристичного маршруту. Розраховані значення показників цілісності (цикломатичного числа), зв'язності, форми графу та компактності маршруту з рис. 2.5. подано в табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Показники цілісності, зв'язності, форми та компактності графу туристичного маршруту

Показник	Цикло-матичне число	Показник зв'язності графу	Діаметр графу	Показник форми графу	Периметр графу	Показник компактності графу
Результат розрахунків						
	1	1	3	1,7	4	0,8

2.3. Застосування графів у гідрології

Методи теорії графів використовуються в гідрології для аналізу та моделювання різних аспектів водних систем. Ось кілька способів, які демонструють, як методи теорії графів можуть бути застосовані в гідрології:

Мережі потоків: У гідрології використовуються графи для моделювання мережі річок та потоків. Вершини графа представляють річки, струмки або інші водні джерела, а ребра відображають потоки води між ними. Застосовуючи алгоритми потокової мережі, можна аналізувати властивості мережі, такі як об'єм води, швидкість потоку, напрямок руху води та інші характеристики.

Аналіз водозабезпеченості: Теорія графів також може бути використана для вивчення водозабезпеченості. Граф може бути побудований, де вершини представляють джерела води (наприклад, озера або річки), а ребра - шляхи перенесення води між ними (наприклад, канали або трубопроводи). Застосовуючи алгоритми потокової мережі, можна визначити, як розподіляється вода між різними джерелами та споживачами.

Аналіз забруднення води: Графи можуть бути використані для моделювання поширення забруднення води. Вершини графа представляють різні місця водного середовища (наприклад, стоки або озера), а ребра відображають потік забрудненої води між ними. Застосовуючи алгоритми пошуку найкоротших шляхів або алгоритми потокової мережі, можна визначити шляхи та швидкість поширення забруднюючих речовин.

3. Застосування диференціальних рівнянь та систем рівнянь для моделювання гідрологічних процесів

План

- 3.1. Поняття про похідну. Основні правила диференціювання
- 3.2. Первісна функції. Невизначений та визначений інтеграл
- 3.3. Диференціальні рівняння. Приклади їх застосування в гідрологічних дослідженнях
- 3.4. Основні методи розв'язування диференціальних рівнянь
- 3.5. Чисельне інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

3.1. Поняття про похідну. Основні правила диференціювання

Диференціальне числення найчастіше застосовується для вирішення задач визначення швидкості руху, прискорення, зміни, динаміки якогось об'єкта чи процесу або для визначення дотичної до кривої. Для екосистем вирішення задачі визначення швидкості є надзвичайно важливим для опису закономірностей зміни їх компонентів, які, в свою чергу, визначають собою структуру та властивості модельованої системи.

Основним поняттям диференціального числення є похідна. Аби зрозуміти сутність похідної функції, розглянемо її на прикладі визначення швидкості. Нехай автомобіль, що рухається, проходить відстань між двома точками (S_1 і S_2) у певні моменти часу (t_1 і t_2). Для того, аби визначити середню швидкість автомобіля за проміжок часу, як відомо з фізики, потрібно розділити шлях, який був пройдений автомобілем, на час, за який автомобіль проїхав цей шлях. Іншими словами, середня швидкість автомобіля визначиться як відношення приросту шляху ($\Delta S = S_2 - S_1$) до приросту часу ($\Delta t = t_2 - t_1$). Тобто, середня швидкість між даними точками на даному часовому інтервалі дорівнюватиме:

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$. При нерівномірному русі середня швидкість недостатньо повно характеризує швидкість руху в конкретний момент часу t . Але чим меншим ми задамо проміжок Δt , тим точнішу характеристику швидкості отримаємо. Тому швидкість руху в конкретний момент часу t є границею, до якої прямує відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Тобто:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , якщо приріст аргументу прямує до нуля. Тобто:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

Теж саме можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Операція знаходження похідної будь-якої функції називається **диференціюванням**. Похідні основних елементарних функцій наведені в таблиці 3.1. Вищенаведена похідна має перший порядок. Функція може похідні і вищих порядків, а може й не мати навіть похідної першого порядку. Наприклад, похідна другого порядку позначається: $f''(x)$ або $\frac{d^2 y}{dx^2}$; похідна n -того порядку $f^{(n)}(x)$ і т.д. Друга похідна показує швидкість зміни першої похідної, третя – другою і т.д.

В моделюванні екологічних систем досліджувана змінна часто може залежати від декількох змінних. В цьому випадку вводиться поняття **часткових похідних**. Частковими похідними функції U

$= f(x, y, z)$ називаються границі відношень:

$$\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \text{ при } \Delta y \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \text{ при } \Delta z \rightarrow 0$$

Позначається це наступним чином:

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{dU}{dx} = f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \\ U'_y &= \frac{dU}{dy} = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \\ U'_z &= \frac{dU}{dz} = f'_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Іншими словами: частковий диференціал – це функції $U = f(x, y, z)$ взятий у припущенні, що величини y, z не змінюються, тобто ($\Delta y = \Delta z = 0$). Повний диференціал дорівнює сумі всіх часткових диференціалів:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz \quad (3.5)$$

Похідна використовується в екологічних дослідженнях дуже часто: при моделюванні швидкості розмноження організмів в екосистемах, швидкості вимирання популяцій, кінетики хімічних реакцій, руху повітряних потоків, поверхневих та підземних вод, швидкості очистки води на очисних спорудах тощо. Наприклад, чисельність популяцій бактерій з часом t змінюється за законом:

$$N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2} \quad (3.6)$$

Швидкість зміни чисельності популяції (інтенсивність розмноження бактерій) можна розрахувати, взявши похідну від (3.6) за часом:

$$N' = N_0 \frac{c + t^2 - 2t^2}{(c + t^2)^2} = N_0 \frac{c - t^2}{(c + t^2)^2} \quad (3.7)$$

3.2. Первісна функції. Невизначений та визначений інтеграл

Для вирішення багатьох практичних завдань необхідно знайти функцію $f(x)$ за її похідною $f'(x)$, тобто виконувати операцію, обернену до диференціювання. Наприклад: знайти закономірність, за якою змінювалась швидкість $v(t)$, якщо залежність зміни прискорення від часу $a(t)$ відома. Шуканою функцією буде така $u(t)$, dv для якої $a = \frac{dv}{dt}$. Або, наприклад, знайти закон руху $s(t)$ матеріальної точки

за відомою залежністю зміни швидкості від часу; як відомо $v(t) = \frac{ds}{dt}$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо $F(x)$ має свою похідною функцію $f(x)$ або своїм диференціалом $f(x)dx$, тобто:

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x) dx.$$

Кожна функція, що має первісну, має нескінченну кількість первісних, які відрізняються одна від одної на постійний доданок. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для даної функції $y = f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$. Невизначений інтеграл позначається:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (3.8)$$

де $f(x)$ - підінтегральна функція; $f(x)dx$ - підінтегральний вираз; \int - знак інтеграла, x - змінна інтегрування.

Таблиця 3.1. Похідні та інтеграли основних елементарних функцій

Функція	Похідна	Інтеграл
$y = a = \text{const}$	$y' = 0$	$\int a dx = ax + C$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$y = \text{tg } x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
$y = \text{ctg } x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$	$\int u dv = uv - \int v du$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\int x \cos dx = s \sin x + \cos x + C$
$y = f[u(x)]$	$y' = f'(u) \cdot u'(x)$	$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$

В таблиці 3.1 наведено перелік похідних та інтегралів основних елементарних функцій.

Серед основних методів інтегрування найчастіше застосовуються:

1. Безпосереднє інтегрування – інтегрування, котре проводиться за допомогою таблиць (табл. 3.1) без додаткових перетворень. В окремих випадках використовують *метод розкладання*, який базується на поданні підінтегральної функції через суму функцій, кожна з яких є табличною.

2. Інтегрування підстановкою (заміна змінної). Зміст цього методу полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ виконується заміна змінної $x = \varphi(t)$, тобто вводиться нова змінна t замість x . Отримують диференціал $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді початковий інтеграл записується у вигляді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \quad (3.9)$$

Якщо підстановка (заміна змінної) вдала, то другий інтеграл легко визначається. Найчастіше

для введення нової змінної вибирають деяку функцію, що входить у підінтегральний вираз: $f = z(x)$.

3. Інтегрування частинами. Розглянемо дві неперервні (диференційовні) функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Візьмемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = vdu + u dv$$

Звідси:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3.10)$$

Таким чином, інтеграл $\int u dv$ зводиться до інтеграла $\int v du$, який часто обчислюється простіше.

Визначений інтеграл. Коли ми вели мову про невизначений інтеграл, то мали на увазі певну міру, а саме площу, що обмежена кривою в межах зміни незалежної змінної. Якщо ми взяли б будь-який конкретний інтеграл, то побачили, що по-суті, він є одним із нескінченної множини невизначених інтегралів даної функції. Постійна величина (константа) невизначеного інтегралу не може бути вказана точно. Коли ми інтегруємо, то абсолютно ясно, що не має смислу підставляти константу кожний раз, оскільки для кінцевого результату інтегрування вона не має значення, бо при розрахунку постійні скорочуються. Інша справа, якщо ми задамо межі інтегрування, тобто інтервал в якому змінюється Δx . Інтеграл, взятий від функції на певному проміжку значень аргументу (x_i, x_{i+1}) називається визначеним і записується у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_1^n f(x_i) \Delta x \quad (3.11)$$

Визначений інтеграл використовується в моделюванні і прогнозуванні стану довкілля доволі широко. Так, зокрема, за його допомогою обчислюють площі фігур, довжини ліній, об'єми тіл довільної форми, роботу змінної сили, величину поступання у довкілля забруднюючих речовин із змінною інтенсивністю поступання, швидкість зміни тих чи інших параметрів екосистем, абсолютні значення цих змін (шлях), центри маси та інерції тощо. Наприклад, якщо відома швидкість зростання

чисельності популяції $v(t) = \frac{dN}{dt}$, то можна знайти приріст чисельності популяції ΔN за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta N = N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (3.12)$$

З наукових робіт в галузі екології мікроорганізмів відома закономірність зростання популяції пеніцилінових грибків в ідеальних умовах (при необмеженості ресурсів живлення): $v = ae^{kt}$. Приріст такої популяції за проміжок часу Δt становитиме:

$$\Delta N = \int_{t_0}^t ae^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}) \quad (3.13)$$

3.3. Диференціальні рівняння. Приклади їх застосування в гідрологічних дослідженнях

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що містить похідні невідомої функції (можливо навіть різних порядків), функцію і її аргумент (або декілька невідомих функцій). Замість похідних дане рівняння може містити також і диференціали. Загальний вигляд диференціального рівняння з однією невідомою функцією:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.14)$$

Якщо невідомі функції залежать від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається

звичайним, якщо від багатьох аргументів, – диференціальним рівнянням із частковими похідними.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим із порядків похідних, що до нього входять.

Найчастіше диференціальні рівняння застосовують тоді, коли досліджувані екологічні явища та процеси описуються гладкими функціями, коли при моделюванні даних явищ і процесів необхідно оперувати такими параметрами, як швидкість, прискорення тощо. Наприклад, відомо, що в гідрогеоелекології, швидкість інфільтрації вод в ґрунт, визначається наступною залежністю: $y = 15 + 5x^{-0.5}$, де y – швидкість інфільтрації, мм/год, а x – час в годинах. Для зручності ми позначили швидкість інфільтрації через y , хоча в дійсності ця величина є похідною від кількості води за часом. Тому, можемо записати:

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5} \quad (3.15)$$

Візьмемо інтеграл від цієї функції:

$$y = 15x + 10x^{0.5} + C \quad (3.16)$$

Отже, ми розв'язали рівняння (3.15). Але такий розв'язок є загальним, оскільки ми включили до нього сталу C . Рівняння (3.16) таким чином є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.15). Задаючи певні значення y при даному значенні x ми можемо отримати часткові розв'язки. Наприклад, ми можемо записати, що:

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5}, y = 10 \text{ при } x = 0,5 \quad (3.17)$$

або

$$\frac{dy}{dx} = 15 + 5x^{-0.5}, y(0,5) = 10 \quad (3.18)$$

Підставивши (0,5;10) в загальний розв'язок (3.16), знайдемо значення C :

$$10 = 15 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5^{0.5} + C$$

Звідси: $C = 18,1$. Частковий розв'язок матиме вигляд:

$$y = 15x + 10x^{0.5} + 18,1 \quad (3.19)$$

Значення x і y , завдяки підстановці яких ми отримали частковий розв'язок, називаються **граничними умовами**. Якщо ж ми задамо значення функції y при $x = 0$, то така умова називається **початковою умовою**.

3.4. Основні методи розв'язування диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння загалом дуже різноманітні. тому існує величезна кількість методів їх розв'язування. В зв'язку із специфікою даного посібника і орієнтацією його на моделювання і прогнозування стану довкілля, а не на глибокий розгляд диференціальних рівнянь, обмежимося лише наведенням найбільш поширених методів розв'язку найпростіших диференціальних рівнянь (таблиця 3.2).

У класичному математичному аналізі розроблено чимало прийомів знаходження розв'язків диференціальних рівнянь через елементарні функції. Але при вирішенні практичних задач ці методи виявляються, як правило, або зовсім неадекватними, або їх розв'язок є неефективним у зв'язку із неприпустимими витратами зусиль і часу.

Для вирішення прикладних задач розроблені методи наближеного розв'язку диференціальних рівнянь, що умовно можна підрозділити на три основні групи:

1. **Аналітичні методи**, застосування яких дозволить отримати розв'язок диференціального рівняння у виді аналітичної функції (метод Пікара);
2. **Графічні методи**, що дають наближене рішення у виді графіка (метод Ейлера);
3. **Чисельні методи**, коли шукана функція представляється у виді таблиці (метод Рунге-Кутта).

Таблиця 3.2. Основні методи розв'язку диференціальних рівнянь

Вид рівняння	Метод розв'язку
Найпростіші: $\frac{dy}{dx} = f(x)$	Проінтегрувати
Найпростіші: $\frac{dy}{dx} = f(y)$	Розділити на $f(y)$ і проінтегрувати
З розділеними змінними: $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(y)}{f_2(x)}$	Розділити відповідні функції і проінтегрувати
Однорідні $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Перевірити на однорідність з доапомогою підстановки $y = vx$. У випадку позитивного результату звести до вигляду: $v + x \frac{dv}{dx} = f(v)$ Розв'язати і підставити вираз для v
В повних диференціалах: $Q \frac{dy}{dx} + P = 0$ $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$	Із виразу $du/dx = P$ знайти u , потім із виразу $du/dy = Q$ знайти $f(y)$. Розв'язок виражається через u
Не є рівнянням в повних диференціалах: $Q \frac{dy}{dx} + P = 0$ $\frac{dQ}{dx} \neq \frac{dP}{dy}$	Постарайтесь знайти інтегруючий множник, так щоб: $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$ Потім розв'язувати як в попередньому рівнянні
Не є однорідним і в повних диференціалах: $\frac{dy}{dx} + Ay = B$	Записати у вигляді: $\frac{d}{dx} e^{\int A dx} y = e^{\int A dx} B$

Очевидно, що розв'язок рівняння виду $y = f'(x, y)$ зводиться до відшукування найближчих значень інтегралу якщо рівняння задовільняє початковві умови, розв'язок існує і він єдиний. Як відомо з загальної теорії диференціальних рівнянь, для цього досить, щоб, функція f'_y що фігурує в правій частині рівняння була неперервна в розглянутій області по обох аргументах і мала обмежену часткову похідну.

Метод Ейлера. В основі методу ламаних Ейлера лежить ідея графічної побудови розв'язку диференціального рівняння. Цей метод дає одночасно і спосіб знаходження шуканої функції в чисельній (табличної) формі. Ідея методу полягає в тім, що на малому проміжку зміни незалежної змінної $x_0 \leq x \leq x_0 + h = x_1$ інтегральна крива диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ заміняється відрізком прямої (дотичної) $y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$.

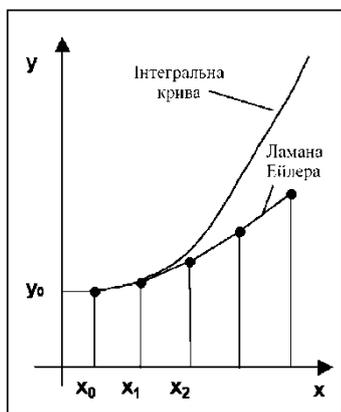


Рис. 3.1. Графічна суть методу Ейлера

Звідси $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$ і процес можна повторити для проміжку $x_1 \leq x \leq x_1 + h = x_2$ і т.д. Число h є тут кроком таблиці. Геометрично інтегральна крива замінюється при цьому ламаною, яку називають *ламаною Ейлера* (рис. 3.1).

Робоча формула для визначення значень y по методу Ейлера має вигляд

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \quad (20)$$

$$\text{де: } \Delta y_k = f(x_k, y_k) \cdot h, \quad y_k = y(x_k), \quad x_k = x_0 + kh$$

Метод Ейлера має малу точність, до того ж похибка кожного нового кроку систематично зростає. Найбільш прийнятним для практики методом оцінки точності є в даному випадку метод подвійного рахунка – із кроком h і з кроком $h/2$. Якщо в розв'язках, отриманих двома способами, збігаються десяткові знаки, то такі результати можна вважати вірними. Помилка методу пропорційна h^2 . Існують різні уточнення методу Ейлера, що підвищують його точність так, що помилка методу стає пропорційною h^3 .

Метод Рунге-Кутта. Нехай дане диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$. Вибіремо крок h і для стислості введемо позначення $x_i = x_0 + ih$ і $y_i = y(x_i)$, ($i=0, 1, 2, \dots$). Приведемо без виведення один з варіантів відповідних розрахункових формул:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}), \\ k_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \\ k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{cases} \quad (3.21)$$

Послідовні наближення y_i шуканої функції y визначаються по формулі:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (3.22)$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

В цьому випадку похибка на кроці пропорційна п'ятому степені кроку (h^5). Звідси, зокрема, впливає, що при досить малому h і малих похибках обчислень розв'язок рівняння, отриманий методом Рунге-Кутта за формулами (3.21), буде близьким до точного.

Геометричний зміст використання методу Рунге-Кутта з розрахунковими формулами (3.21) полягає в наступному: з точки (x_i, y_i) пересуваються в напрямку, визначеному кутом α_1 , для якого $\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На цьому напрямку вибирається точка з координатами $(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$. Потім із точки (x_i, y_i) пересуваються в напрямку, визначеному кутом α_2 , для якого $\operatorname{tg} \alpha_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$, і на цьому напрямку вибирається точка з координатами $(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$. Нарешті, із крапки (x_i, y_i) зрушуються в напрямку, обумовленому кутом α_3 , для якого $\operatorname{tg} \alpha_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$ і на цьому напрямку вибирається

точка з координатами (x_i+h, y_i+k_3) . Цим задається ще один напрямок, визначений кутом α_4 , для якого $\operatorname{tg} \alpha_4 = f(x_i+h, y_i+k_3)$. Чотири отриманих напрямки усереднюються відповідно до останньої з формул (21). На цьому остаточному напрямку і вибирається чергова точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i+h, y_i+\Delta y)$.

Що ж стосується диференціальних рівнянь n -ого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3.23)$$

для яких завдання Коші полягає в знаходженні рішення $y=y(x)$, що задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, то їх можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Так, наприклад, рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (3.24)$$

можна записати у виді системи двох рівнянь першого порядку за допомогою стандартної заміни:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \quad (3.25)$$

Методи рішення систем звичайних диференціальних рівнянь ґрунтуються на відповідних методах рішення одного рівняння.

3.5. Чисельне інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь

Метод Рунге-Кутта застосовується також для наближеного розв'язку *систем звичайних диференціальних рівнянь*. Нехай, наприклад, задана система диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad (3.26)$$

$$\text{де } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Під *рішенням системи* (3.26) розуміється будь-яка сукупність функцій $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, яка, будучи підставлена в рівняння (3.26), перетворює їх у тотожності. Оскільки система диференціальних рівнянь має незліченну безліч рішень, то для вибору одного конкретного рішення $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, крім самого рівняння, потрібні додаткові умови. У найпростішому випадку задаються початкові умови

$$y(x_0) = y^{(0)} \quad (3.27)$$

що приводить до задачі Коші. Наприклад, знайдемо розв'язок $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ системи (26), що задовольняє заданим початковим умовам (12), де x_0 – фіксоване значення незалежної змінної, а $y^{(0)}$ – задана система чисел

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Якщо x інтерпретувати як час, а y_1, \dots, y_n - як узагальнені координати деякої екологічної системи, то отримаємо наступний аспект задачі Коші: знаючи диференціальні рівняння, що керують системою, а також стан її в початковий момент часу x_0 , визначити стан системи в будь-який момент часу x .

Задавши деякий крок h і ввівши стандартні позначення $x_i = x_0 + ih$ і $y_i = y_i(x)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ при $i=0, 1, 2, \dots$, можемо записати:

$$\begin{cases} k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}), \\ k_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}), \\ k_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) \end{cases} \quad (3.28)$$

Відповідно до методу Рунге-Кутта Δy_0 приблизно визначають по формулі

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}), \quad (3.29)$$

звідси:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0.$$

Далі, прийнявши (x_1, y_1) за вихідні дані і повторюючи той же процес, знаходимо y_2 . Аналогічно розрахунки проводяться далі.

Сучасна комп'ютерна техніка дозволяє суттєво спростити розрахунки при розв'язку диференціальних рівнянь та їх систем. На сьогодні існує два підходи до розв'язку диференціальних рівнянь за допомогою комп'ютера.

Перший з них передбачає написання програми на одній з мов програмування (як високого, так і низького рівня), яка б автоматично розв'язувала певне рівняння після задання умов розрахунку (граничних і початкових). В основі розробки такої програми лежить один із відомих математичних способів розв'язку диференціальних рівнянь (найчастіше, Ейлера, Рунге-Кутта). Даний метод є відносно складним, оскільки передбачає не лише знання теорії диференціальних рівнянь на високому рівні, але й володіння однією із мов програмування (Basic, Pascal, TurboPascal, Delphi, Visual Basic, C++ тощо).

Інший метод є дещо простішим. Диференціальні рівняння та їх системи можна розв'язувати за допомогою встроєних можливостей деяких комп'ютерних програм (Derive, Mathematica, MathCad, MathLab тощо). Алгоритми встроєних функцій по розв'язуванню рівнянь теж є стандартними (Ейлера, Рунге-Кутта, або їх модифікацій). Складність цього методу полягає в тому, що потрібно добре знати синтаксис програми, а математичних процесорах він, як правило, доволі складний. Хоча перевага методу – очевидна: суттєва економія праці і часу, можливість представлення результатів у табличній або графічній формі, можливість експорту результатів у інші формати для подальшої їх обробки.

4. Елементарні математичні функції та їх застосування в гідрології та гідроекології

План

4.1 Загальне поняття про елементарні математичні функції

4.2 Властивості стандартних функцій та їх застосування

4.1. Загальне поняття про елементарні математичні функції

Елементарні математичні функції (лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо) дуже широко застосовуються при моделюванні та прогнозуванні стану довкілля. За допомогою властивостей цих функцій можна проаналізувати взаємозалежність та взаємообумовленість різних екологічних процесів, визначити ступінь впливу одного явища на інше, виділити певні явища та процеси, вплив яких суттєвий для техноекосистеми, а саме головне – задати в аналітичній формі саму модель, яка б відображала залежність зміни одного екологічного параметра середовища від зміни іншого. Тому то знання найважливіших математичних функцій є необхідною запорукою для розуміння сутності екологічних явищ та їх взаємозв'язків, а також для їх адекватного моделювання.

Поняття **функції** (функціональної залежності) є одним з основних математичних понять. Розглянемо дві множини чисел X і Y , які пов'язані між собою. Числа X та Y є змінними, тобто можуть набувати різних значень. Змінну, що викликає зміни у властивостях іншої або інших змінних називають **незалежною змінною**, а ту, яка зазнає цих змін, – **залежною змінною**. Якщо кожному елементу x , що належить множині X ($x \in X$) за деяким законом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано **функцію $f(x)$** . Тобто термін “функція” передбачає закон або правило, застосувавши який до аргументу x , отримає значення y . Записують це так: $y = f(x)$, $x \in X$.

У такому разі x називають **аргументом функції f** , а y (або $f(x)$) – **функцією змінної x** . Множину всіх X називають **областю визначення функції f** , а множину всіх y , для яких $y = f(x)$, – **областю значень**.

Функціональну залежність між змінними величинами x та y найчастіше задають одним із трьох способів:

- аналітичним;
- графічним;
- табличним.

Аналітичний спосіб передбачає завдання функції за допомогою формули. Візьмемо, для прикладу, поліноміальну кубічну функцію: $y = x^3 + x^2 + x$.

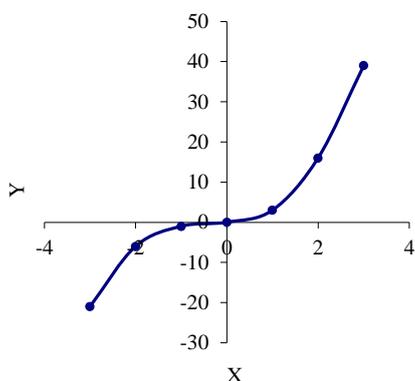


Рис. 4.1. Графік функції $y = x^3 + x^2 + x$

Графічний спосіб передбачає використання графіка функції. Множину всіх точок $M(x, y)$ координатної площини, для яких x – значення аргумента функції f , а $y = f(x)$ – значення функції f , називають **графіком функції**. Задати функцію графічно означає зобразити її графік. Графік функції: $y = x^3 + x^2 + x$ зображено на рис. 1.

Табличний спосіб передбачає подання даних у таблиці, де значенням аргументу поставлені у відповідність значення функції. Таблиці застосовують у випадку скінченної множини визначення.

Нижче задана та ж сама функція $y = x^3 + x^2 + x$ у табличному вигляді.

Табл.4.1. Залежність значень функції від значень аргументу для функції $y = x^3 + x^2 + x$

X	Y
-3	-21
-2	-6
-1	-1
0	0
1	3
2	16
3	39

4.2 Властивості стандартних функцій та їх застосування

Серед елементарних математичних функцій, які застосовуються для моделювання та прогнозування стану довкілля найважливішими є: лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні. Коротко розглянемо їх.

Лінійна функція – найпростіша з функцій. Задається формулою:

$$y = kx + b \quad (4.1)$$

або рівнянням:

$$ax + by + c = 0 \quad (4.2)$$

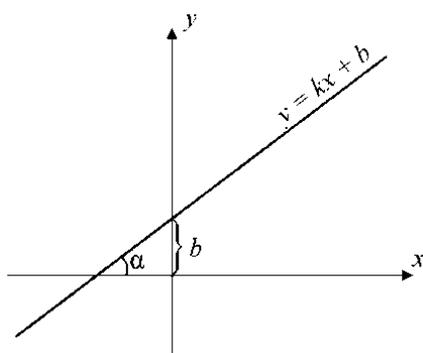


Рис. 4.2. Графік лінійної функції $y = kx + b$

Графіком цієї функції є пряма лінія (рис. 2). Числа k , b (або a , b , c у рівнянні (2)) називаються **параметрами функції** або **коефіцієнтами рівняння функції**. Коефіцієнт k називається ще **кутовим коефіцієнтом** і характеризує нахил прямої лінії до осі абсцис. Математичний зміст цього коефіцієнта полягає у тому, що він характеризує нахил лінії графіка функції до осі абсцис і дорівнює: $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Коефіцієнт b іноді ще називають **вільним членом рівняння**. Він показує довжину відрізка, який відсікає лінія графіку від початку координат. Отже, якщо рівняння функції не містить коефіцієнта b , то її графік пройде через початок координат.

Лінійна функція в екології застосовується не дуже часто. Справа в тому, що сутність дуже складних екологічних процесів та явищ, як правило, не можна звести до простої лінійної залежності. Найчастіше дана функція використовується для приблизного моделювання, визначення лінії тренду розвитку різноманітних процесів, оцінки пропорційної залежності. В.І. Лаврик (2002), наприклад, демонструє застосування даної функції для розрахунку залежності маси риб від їх віку:

$$w = at$$

де w – маса риби, a – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби, t – вік риби.

Аналогічно можна записати залежність між довжиною риби і її віком:

$$L = bt$$

де b – теж емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби.

З обох цих рівнянь можна виразити спільний член t . Отримаємо пропорцію, підставивши в яку емпіричні коефіцієнти a і b , і, наприклад, довжину риби, отримаємо її масу.

Розглянемо ще один приклад. Температура повітря зменшується з висотою. Причому таке зменшення становить $0,98^\circ \text{C}$ на кожні 100 м підйому. Тому функція, що пов'язує температуру з висотою матиме кутовий коефіцієнт $0,98$ і запишеться у вигляді:

$$t = 0.98x + t_0,$$

де x – висота підйому, t – температура повітря на висоті x , t_0 – початкова температура біля поверхні Землі.

Зауважимо, що така залежність справедлива лише тоді, коли підйом повітря відбувається за сухоадіабатичним законом. Тобто доти, доки повітря не стане насиченим вологою і не досягне точки роси. Далі атмосферна волога почне конденсуватись і зміна температури відбуватиметься вже за іншим законом (вологоадіабатичним).

Окремим випадком лінійної функції є **прямо пропорційна** залежність. При **прямо пропорційній** залежності зміна значення аргументу в кілька разів викличе зміну значення функції у стільки ж разів. Прямо пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = kx \tag{4.3}$$

Звідси:

$$y/x = k = const \tag{4.4}$$

Число k називають **коефіцієнтом пропорційності**. Даний коефіцієнт можна вивести із самого визначення функції (3-4). Нехай графік функції проходить через дві точки з координатами А ($x_1; y_1$) і У ($x_2; y_2$). Тоді:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4.5}$$

Графік такої функції зображається прямою лінією, що проходить через початок координат (оскільки рівняння не містить вільного члена).

Якщо ж збільшення однієї величини у кілька разів призводить до відповідного зменшення іншої величини у стільки ж разів, то кажуть, що між цими величинами існує **обернено пропорційна** залежність. Оборнено пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = \frac{k}{x} \tag{4.6}$$

Тоді:

$$xy = k = const \tag{4.7}$$

В рівняннях (4.6-4.7) k – **коефіцієнт оберненої пропорційності**. В загальному випадку обернено пропорційна залежність виражається функцією:

$$y = \frac{k}{x-a} + b, \tag{4.8}$$

де k, a, b – постійні величини (параметри або коефіцієнти).

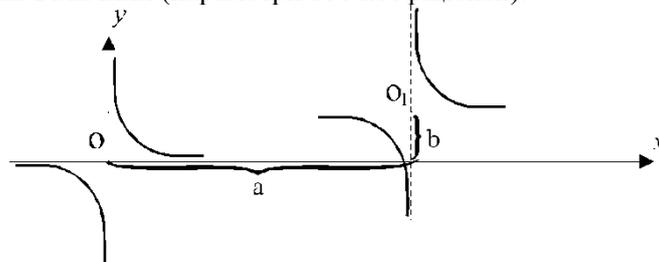


Рис. 4.3. Графік функції обернено пропорційної залежності

Як видно з рис. 4.3, якщо рівняння обернено пропорційної залежності не містить вище згадуваних коефіцієнтів, то її графік пройде через початок координат. Математично зміст цих коефіцієнтів полягає у тому, що їх модулі дорівнюють довжині відрізків, які відсікає графік функції відповідно на осі абсцис

(а) та ординат (b).

Як правило, дана функція використовується для встановлення взаємозалежності між екологічними процесами, які або взаємодоповнюють один одного, або протиставляються один одному. Наприклад, формула для визначення коефіцієнта зволоження має вигляд:

$$k = A / B, \quad (4.9)$$

де A – кількість опадів на даній території (мм), B – випаровування (мм), k – коефіцієнт зволоження. Вважається, що якщо k близьке або більше за 1, то клімат – гумідний, а чим ближче його значення до 0, тим клімат аридніший.

Розглянемо дещо складніший випадок. Доволі часто дану залежність у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля використовують для розрахунку взаємодії двох або кількох об'єктів методом потенціалів. Наприклад, взаємний вплив населених пунктів найбільш помітним чином виражається у вигляді матеріально-речовинних і людських потоків, інформаційних зв'язків. Обмежимося розглядом моделі, що враховує вплив лише людських потоків, а саме моделі потенціалу поля розселення (демографічного потенціалу), запропонованої Стюартом. Людські потоки, головним чином, залежать від розмірів населених пунктів (чисельності їхнього населення) і від відстаней між ними. В загальному вигляді дану модель можна представити рівнянням:

$$I_{i,j} = k \frac{H_i H_j}{R_{i,j}^a}, \quad (4.10)$$

де $I_{i,j}$ – людський потік від i -го населеного пункту до j -го населеного пункту, k – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, H_i – чисельність населення i -го населеного пункту, H_j – чисельність населення j -го населеного пункту, $R_{i,j}$ – відстань між населеними пунктами, a – показник степені, для більшості населених пунктів $a = 2$.

Обернено пропорційна залежність є окремим випадком дробово-лінійної функції, яка розглядається нижче.

Дробово-лінійна функція. В загальному випадку дробово-лінійна функція записується у вигляді:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (4.11)$$

де a , b , c і d – сталі параметри (коефіцієнти).

Оскільки знаменник не може дорівнювати 0, то функція у визначається для всіх значень x , крім точки $x = -\frac{d}{c}$. При $c = 0$ дана функція перетворюється на лінійну. Графіком даної функції буде

гіпербола, яка зміщена відносно осі абсцис на величину $\frac{a}{c}$, а осі ординат $-\frac{d}{c}$.

Основним критерієм самоочищення атмосфери є числове значення метеорологічного потенціалу самоочищення атмосфери (МПСОА). Воно розраховується за формулою:

$$K = \frac{T + B_1}{O + B_2}, \quad (4.12),$$

де K – числове значення МПСОА

T – кількість днів із туманами

O – кількість днів з опадами

B_1 - кількість днів з швидкістю вітру 0-1м/с

B_2 - кількість днів з швидкістю вітру > 6 м/с.

В свою чергу кількість днів із туманами та опадами можна розписати як функцію зволоження, стратифікації та циркуляції атмосфери, характеру підстилаючої поверхні. В такому вигляді дана функція більш наочно відповідатиме рівнянню (11). В таблиці відображені результати розрахунку величини K для метеостанцій м. Луцька і трьох найближчих метеостанцій (Ковель, Володимир-Волинський, Маневичі).

Таблиця 4.2. Потенціал самоочищення атмосфери для Волинської області

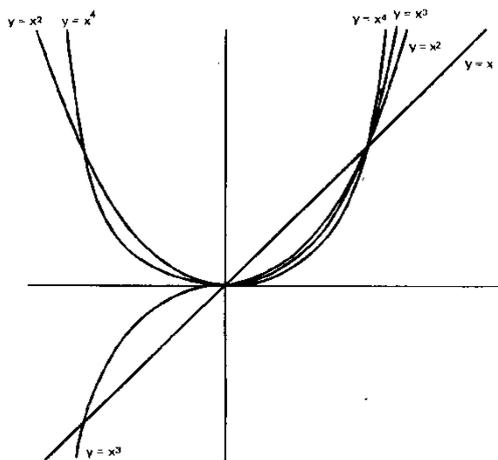
№ з/п	Показники	Метеорологічні станції			
		Луцьк	Ковель	Вол.-Вол.	Маневичі
1	Кількість днів з туманами	154	18	27	27
2	Кількість днів з швидкістю вітру 0-1 м/с	88	65	44	36
3	Кількість днів з швидкістю вітру > 6 м/с	97	5	61	6
4	Кількість днів з опадами	309	142	158	148
5	МПСОА	0,60	057	0,34	0,41

Степенева функція в загальному випадку записується рівнянням:

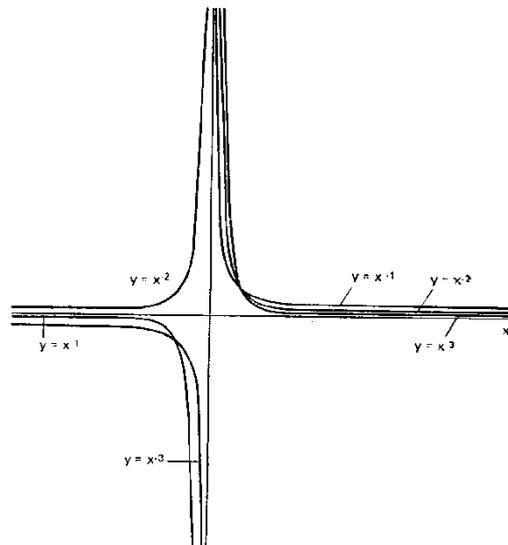
$$y = kx^n, \quad (4.13)$$

де k – сталий коефіцієнт, а n – показник степеня.

а.



б.



в.

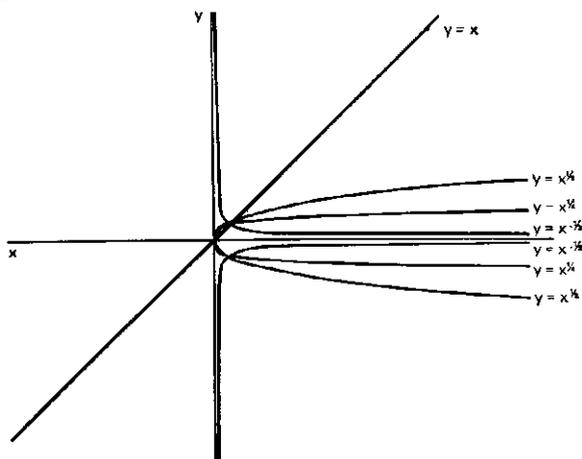


Рис. 4.4. Загальний вигляд графіків степеневих функцій при різних значеннях n

Рис. 4.4а. $n \geq 1$

Рис. 4.4б. $n \leq -1$

Рис. 4.4в. $-1 \leq n \leq 1$

Отже, як видно з рис. 4.4, вигляд кривих степеневих функцій дуже різноманітний, він залежить від модуля та знаку показника степеня n , а також коефіцієнта k . Характерним для усіх цих графіків є те, що чим більше значення n , тим ближче лежать їх вітки до осі ординат.

Степеневі функції застосовуються дуже широко, особливо якщо між досліджуваними явищами існує тісний однозначний зв'язок. Доволі часто вони адекватно описують суть екологічних явищ та процесів. Наприклад, на рис. 5 проілюстровано динаміку захворюваності населення м. Луцька. На

діаграмі також поміщено лінію тренду з прогнозом до 2005 р., апроксимовану степенною функцією $y = 6E - 98x^{30,38}$.

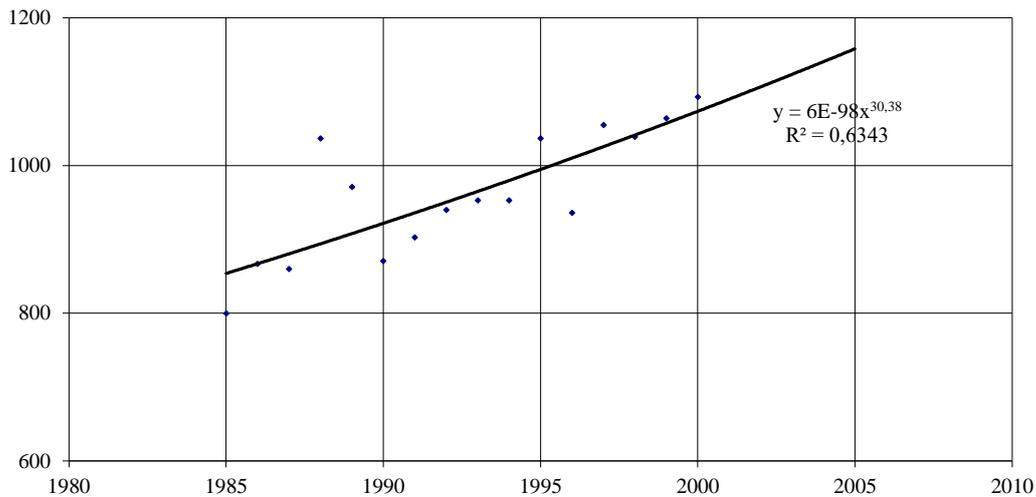


Рис. 4.5. Динаміка захворюваності населення м. Луцька

Наприклад, для пшениці залежність між вмістом у ґрунті азоту та врожайністю записується у вигляді степенної функції:

$$\varphi_i^* = 90 \cdot (1 - 10^{-0.122x_i}) \cdot 10^{-0.032x_i^2}, \quad (4.14)$$

де x_i – вміст азоту в ґрунті.

В гідрології та гідроекології подібні зв'язки мають місце при аналізі стоку річки з одиниці площі водозбору, віднесеної до всієї площі басейну. Так, наприклад, при аналізі кривих середньобагаторічного паводкового стоку для р. Лінмузт *Dobbie* та *Wolf* (1953) встановили дану залежність у вигляді:

$$R = 3350 A^{-0,5}, \quad (4.15)$$

де R – стік в m^3 з одиниці площі за одиницю часу, A – площа водозбору.

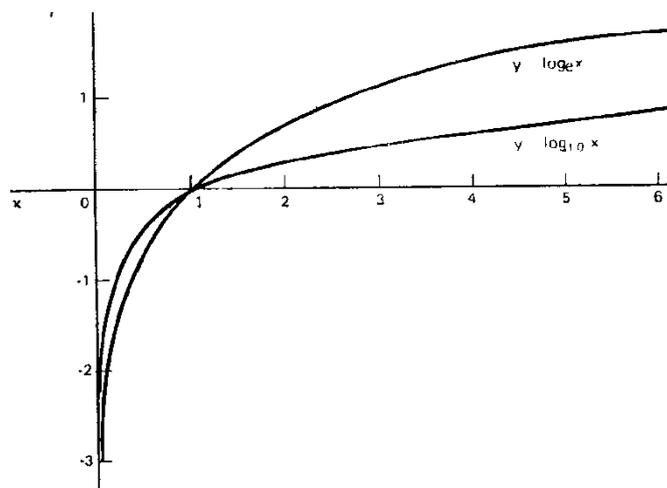


Рис. 4.6. Загальний вигляд графіків логарифмічних функцій

Логарифмічна і показникова функції. Логарифмічна функція у загальному випадку записується у вигляді:

$$y = \log_a x, \quad (4.16)$$

де a – основа логарифму.

Якщо в логарифмічній функції за основу логарифму взяти число $e = 2,71828$ (ірраціональне число), то така функція називається **натуральним логарифмом** і записується так:

$$y = \ln x \quad (4.17)$$

а якщо за основу взяти число 10, то відповідно – **десятковим логарифмом**:

$$y = \lg x \quad (4.18)$$

Як видно з рис. 4.6, логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює 0, тому всі криві виду $y = \log_a x$ пересікаються в точці $(1;0)$.

Звертаючись до функції $y = \log_e x$ (або $y = \ln x$) ми тим самим розглядаємо функцію $x = e^y$. Тому **показникова** функція (рис. 4.7):

$$y = e^x \quad (4.19)$$

є теж саме, що й функція $x = \ln y$.

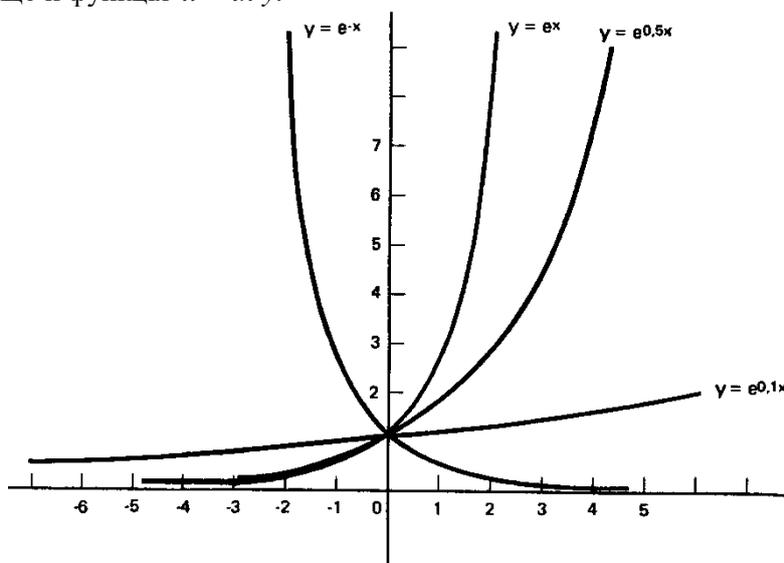


Рис. 4.7. Загальний вигляд графіків показникових функцій

Графік функції $y = e^x$ аналогічний графіку логарифмічної функції (рис. 6) за виключенням двох моментів: він наближається до осі Ox при $x \rightarrow -\infty$ і у ніколи не буває менше нуля. Його ще називають іноді **експонентою**. Графік функції $y = e^{-x}$ є дзеркальним відображенням графіка функції $y = e^x$ відносно осі y . Очевидно, що форма графіка буде тим пологішою, чим менший коефіцієнт буде стояти перед x у показнику степеня. Це добре видно на рис. 7 (графік функції $y = e^{0.1x}$).

Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля. Логарифмічні та показникові функції застосовуються дуже широко. Наприклад, варіацію щільності населення усередині площі міста досліджував фахівець із математичної статистики К. Кларк. Він застосував просту теоретичну показникову функцію (20) для опису залежності між Π і l :

$$F(\Pi) = e^{-\gamma l}, \quad (4.20)$$

де $F(\Pi)$ – теоретична щільність (частота) населення в даній точці міста; l – відстань у кілометрах від центра міста (за центр міста приймається уявне коло з максимальною щільністю населення); Π і γ – емпіричним шляхом розраховані коефіцієнти для кожного окремого міста. Наприклад, для Неаполя

$\Pi = 78,8$, а $\gamma = 0,598$. Тоді теоретичну щільність можна обчислити за формулою (4.21):

$$F(\Pi) = 78,8e^{-0,598\Pi} \quad (4.21)$$

Інший приклад. Для розрахунку умов та наслідків забруднення річок у результаті скиду забруднених стічних вод крім власне розрахунку забруднення важливе значення має моделювання умов руху води в річці (швидкості, гідродинамічного потенціалу, модуля стоку, витрати води і т.д.), умов перемішування (турбулентності чи ламінарності потоку) тощо. Тому виникає важливе завдання моделювання поздовжнього профілю річки. Вперше це було виконано англійським вченим Дж. Грінном (1935) для р. Мол. Він зв'язав криву загального виду з висотними відмітками базису ерозії в минулому, що представлені залишками терас у нижній частині долини, і отримав таку залежність:

$$y = a - k \log a (p - x), \quad (4.22)$$

де y – абсолютні відмітки висоти над рівнем моря; x – відстань від гирла річки, p – загальна протяжність річки; a і k – емпірично розраховані коефіцієнти, які для р. Мол становлять відповідно 241,5 і 65. Підставивши їх у формулу (4.22) отримаємо:

$$y = 241,5 - 65 \log a (p - x), \quad (4.23)$$

Для швидкості розмноження бактерій справедлива така залежність:

$$N = N_0 e^{rt} \quad (4.24)$$

де N – кількість бактерій у будь-який час t ; N_0 – початкова кількість бактерій у момент часу $t = 0$; r – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально.

Тригонометричні функції. Тригонометричні функції дозволяють виразити прямокутні координати (x ; y) через полярні координати (r ; α). Вони виражають взаємозалежності між довжиною сторін та градусною мірою кутів прямокутного трикутника (рис. 4.8).

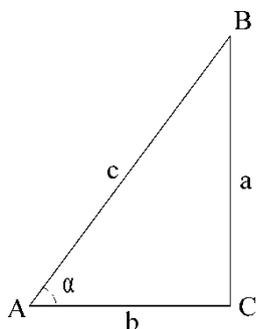


Рис. 4.8. Типовий прямокутний трикутник:

- a – протилежний катет;
- b – прилеглий катет;
- c – гіпотенуза.

Таблиця 2. Значення тригонометричних функцій для певних значень кутів

y	$\alpha, ^\circ$							
	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$

З рис. 8 можна дати визначення тригонометричних функцій кута α :

синусом кута α називається відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin \alpha = a / c; \quad (4.25)$$

косинусом кута α називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = b / c; \quad (4.26)$$

тангенсом кута α називається відношення протилежного катета до прилеглого катета:

$$\operatorname{tg} \alpha = a / b; \quad (4.27)$$

котангенсом кута α називається відношення прилеглого катета до протилежного:

$$\operatorname{ctg} \alpha = b / a. \quad (4.28)$$

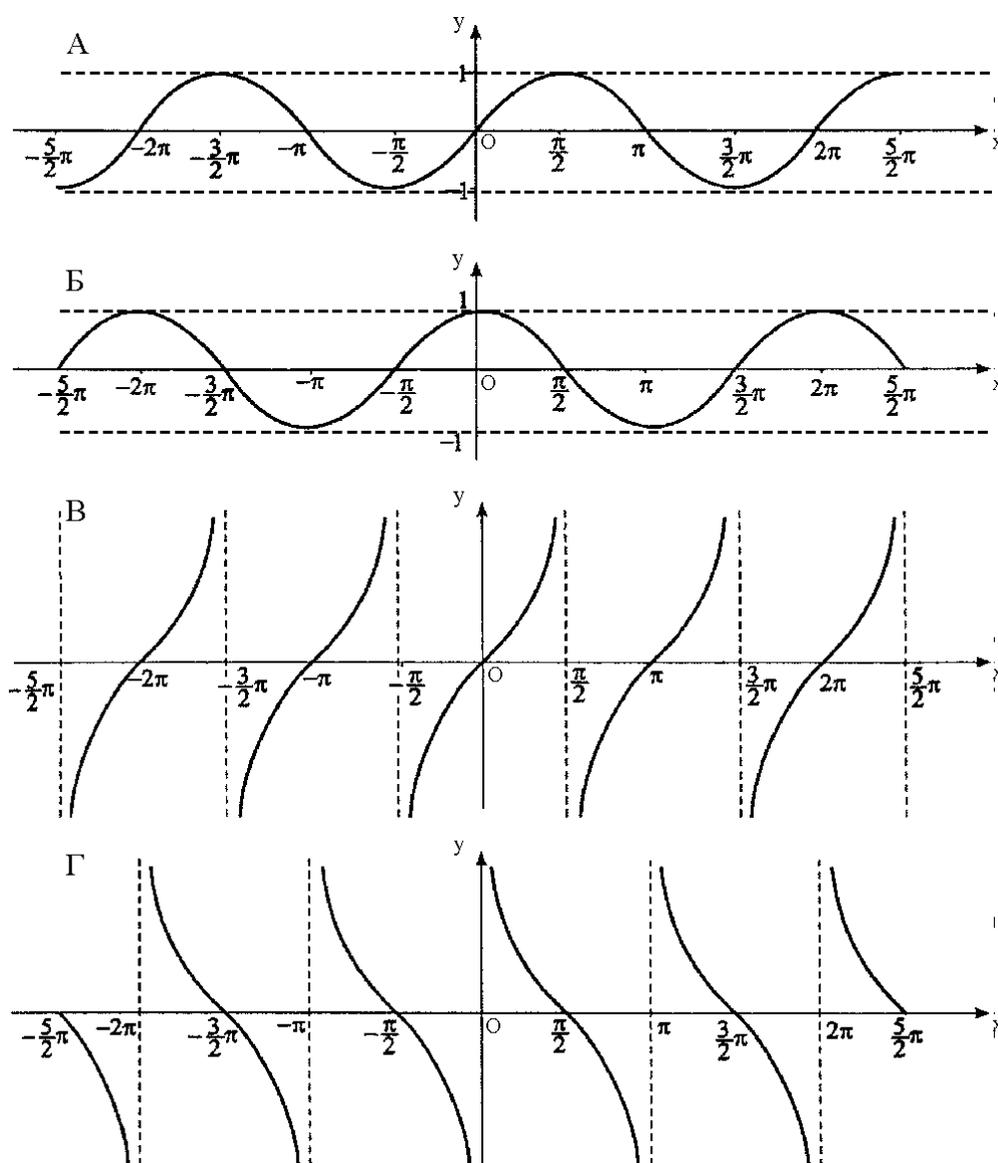


Рис. 4.9. Графіки тригонометричних функцій:
 А – $y = \sin x$;
 Б – $y = \cos x$;
 В – $y = \operatorname{tg} x$;
 Г – $y = \operatorname{ctg} x$

На рис. 4.9 зображені графіки тригонометричних функцій. Для графіків $\sin x$ та $\cos x$ значення функцій знаходяться в інтервалі $(-1; 1)$. Тому на графіках через точки з ординатами $y = -1$ та $y = 1$ проведені **асимптоти**, тобто лінії, що обмежують область значень функції. Асимптотами для графіків функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ будуть вертикальні лінії, для яких координата x кратна π (наприклад: -2π ; $-\pi$; π ; 2π і т.д.). Значення тригонометричних функцій основних кутів наведено в таблиці 2, знаки функцій у різних чвертях (квадрантах) – в таблиці 3.

Таблиця 4.2. Значення тригонометричних функцій у різних чвертях (квадрантах)

Значення функцій	Чверті			
	I (0-90°)	II (90-180°)	III (180-270°)	IV (270-360°)
$\sin x$	+	-	-	+
$\cos x$	+	+	-	-
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} x$	+	-	+	-

Між тригонометричними функціями існують певні залежності, що дозволяють виразити одну функцію через іншу. Виводяться вони з теореми Піфагора.

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (4.29)$$

Тригонометричні функції широко застосовуються у моделюванні. Це зумовлено їх спільною властивістю – **періодичністю**. Функцію $y = f(x)$, $x \in D$ називають **періодичною**, якщо існує таке число $T > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. Найменше з таких чисел T називається основним періодом функції $f(x)$. Ясно що дане твердження справедливе для всіх $(x + T) \in D$, якщо $x \in D$. Тобто для побудови графіка періодичної функції достатньо його побудувати на відрізку довжиною, що дорівнює основному періоду, а далі здійснити паралельне перенесення побудованої частини графіка функції вздовж осі Ox . Наприклад, для функцій $\sin x$ та $\cos x$, як видно з рис. 9, основний період дорівнює 2π , а для функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x - \pi$.

Строгі періодичні закономірності в природі спостерігаються дуже рідко. Зате багато явищ та процесів, які більш-менш близькі до періодичних. Їх називають квазіперіодичними. Прикладом періодичності в природі може бути зміна дня й ночі, пір року. Вони виникають внаслідок обертання Землі навколо своєї осі та навколо Сонця. Саме квазіперіодичний розподіл мають зміна припливів та відпливів, температури (рис. 10), вологості, хмарності, іноді напрямку вітру (наприклад, для мусонів, бризів), інтенсивність фотосинтезу, приросту біомаси, здатність природних систем до самоочищення та їх стійкість до антропогенного впливу. Як видно з рис. 4.10, графік річного ходу температури в помірних широтах дуже нагадує синусоїду, зміщену в додатну сторону по осі Ox

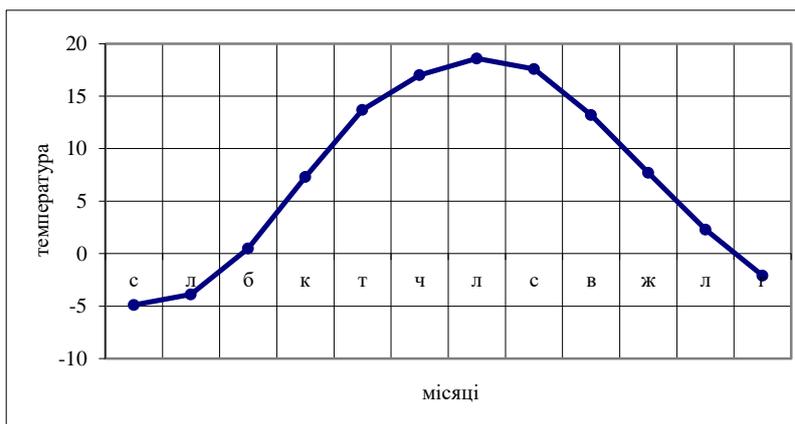


Рис. 4.10. Графік річного ходу температури повітря для м. Луцька

Для прикладу інших застосувань періодичних функцій приведемо дослідження характеру, інтенсивності та зумовленості процесу меандрування (звивистості) річки. Уперше подібна модель була розроблена американським вченим Спейджем (Speight, 1965) у вигляді:

$$x_{(k)} = \frac{1}{n} \left[r_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ r_L \left(1 + \cos \frac{\pi L}{m} \right) \cos \frac{\pi i L}{m} \right\} \right], \quad (4.30)$$

де x – інтенсивність меандрування, k – число коливань на одиницю відстані (частота), n – число змінених азимутів (взятих між точками, що рівномірно розподілені вздовж тальвегу річки), m – відстань меандри від витoku річки, L – довжина річки, r_L – коефіцієнт автокореляції.

Комбінації функцій. Вищерозглянуті елементарні функції є одними із основних інструментів, із допомогою яких будуються математичні моделі зв'язку між екологічними процесами та явищами. Але, на жаль, із допомогою цих стандартних функцій не завжди вдається отримати задовольняючу нас відповідність. Значення ж елементарних функцій полягає в тому, що вони дозволяють хоча б апроксимувати вигляд криволінійного зв'язку.

Якщо зв'язки мають коливальну форму, то можна спробувати співвіднести їх із тригонометричними чи оберненими тригонометричними функціями. Там, де ясно прослідковується

тенденція росту градієнта з ростом x , можна спробувати застосувати або степеневі функції з $n > 1$, або експоненціальні функції. Аналогічно там, де спостерігається зменшення нахилу із збільшенням x , потрібно виходити з властивостей логарифмічних або степеневих функцій при $0 < n < 1$. В багатьох випадках степеневі функції утворюють послідовність степенів змінної x . Наприклад, функція $y = x^3 + x^2 + x$, графік якої зображений на рис. 1. Такі функції відносяться до **поліномів**. Поліноми, що містять x^2 називаються квадратичними, x^3 – кубічними, x^4 – полінами четвертого степеня і т.д. Як видно поліноми є дуже різноманітними, мають різні за формою графіки (це залежить від величини коефіцієнтів та порядку степеня). Для поліномів у загальному випадку можна сформулювати два правила:

- графік будь-якого полінома проходить через початок координат тоді і лише тоді, коли в рівнянні відсутній постійний член (як, наприклад, для полінома, графік якого зображений на рис. 1);
- максимальна кількість стаціонарних точок функції *на одиницю* менша від показника степеня найвищого порядку: для квадратичного полінома така точка буде єдиною, для кубічного їх існуватиме дві і т.д. (стаціонарними точками називають точки графіка, в яких змінюється напрям кривої, вони важливі для підбору найбільш підходящої кривої).

На сьогодні задача апроксимувати залежність певною функцією дещо полегшується. Це стало можливим завдяки широкому використанню комп'ютерної техніки та пакетів прикладних програм. Так, наприклад, із допомогою стандартної комп'ютерної програми *MS Excel*, яка є практично на кожному комп'ютері можна візуально підібрати вигляд апроксимуючої функції криволінійної залежності. Якщо жодна з підібраних стандартних функцій *MS Excel* ідеально не апроксимує досліджувану залежність, то для приблизної оцінки слід скористатись тією функцією, для якої характерне найвище значення коефіцієнта детермінації

5. Математичні методи простового аналізу інформації

- 5.1. Загальна характеристика методів оцінки просторових взаємозв'язків явищ і структур
- 5.2. Просторовий розподіл географічних показників і отримання кількісних даних з географічних карт
- 5.3. Використання коефіцієнта кореляції для оцінки тісноти зв'язку при аналізі карт, що мають ізолінії
- 5.4. Карти ізокорелят
- 5.5. Показники тісноти зв'язку між якісними ознаками
- 5.6. Використання прийомів теорії інформації у географічних дослідженнях

5.1. Загальна характеристика методів оцінки просторових взаємозв'язків явищ і структур

При географічних дослідженнях і моделюванні природних процесів і явищ результати вимірювань часто наносяться на карти у вигляді ізоліній, наприклад, горизонталі, ізобати, ізобари, ізотерми, ізохрони, ізосейсти, гідроізогіпси.

Однією з найтиповіших задач в географічних дослідженнях є визначення й оцінка просторових взаємозв'язків явищ і структур. При аналізі картографічного зображення на різних тематичних картах прийнято виділяти два типи взаємозв'язку: взаємну відповідність і взаємозалежність.

Взаємна відповідність між явищами встановлюється шляхом порівняння їх картографічних зображень. При цьому оцінюється тільки наявність схожості або відмінності в просторовому розміщенні. Якщо на картах є якісні характеристики, то зв'язок оцінюється поліхоричним показником при великому числі градацій або, наприклад, тетрахоричним показником — при альтернативах.

У теперішній час для вивчення взаємозв'язків по картах широко використовується також апарат теорії інформації, найпридатніший для оцінки взаємної відповідності явищ, що не мають на картах кількісних характеристик. В основі такої оцінки лежить інформаційна функція ентропії.

Взаємозалежність встановлюється в тих випадках, коли картографічне зіставлення доповнюється розглядом причинно-наслідкових зв'язків і змістовним географічним аналізом. При цьому розмежовуються явища, які є результатами дії.

5.2. Просторовий розподіл географічних показників і отримання кількісних даних з географічних карт

Просторовий розподіл географічних показників дає карта. У географічних дослідженнях карта завжди виступала як одне з основних знарядь наукового пізнання. Подібна роль карти в географічному аналізі зумовлена її незамінністю при вивченні просторових географічних закономірностей. Широке використання карт пов'язане також з їх здатністю містити одночасно кількісну і якісну інформацію. Застосування математичних методів при роботі з картою переслідує мету вивчення просторових закономірностей географічних явищ, знаходження зв'язків між двома і більшим числом сукупностей ознак, що вивчаються, створення просторових географічних моделей явища, районування території за комплексом ознак тощо.

Ознаки і їх класифікація. Відповідно до різного рівня вимірювань всі ознаки (показники) умовно можна розділити на три категорії: *якісні*, *порядкові* і *кількісні*. Ознаки, що піддаються тільки іменному рівню вимірювань, носять назву *якісних*. Окремим випадком якісних ознак є ознаки *альтернативні*, коли вся шкала для вимірювання складається всього лише з двох градацій: ознака є і ознака відсутня. Ознаки, які за яким-небудь принципом можуть бути ранжовані, одержали назву *порядкових*. Нарешті, ознаки, які піддаються кількісній оцінці, іменуються *кількісними показниками*.

Слід зазначити, що кількісні дані можна знімати тільки з тих карт, які мають повсюдне розповсюдження ознак. До них відносяться карти, складені способом ізоліній, способом картограм і способом точок. На картах, складених способом ізоліній, кількісні показники знімаються в контрольних точках шляхом інтерполяції даних між сусідніми ізолініями. Проте у зв'язку з

особливістю карт суцільного зображення розподілу показників об'єм інформації, який міститься в карті, практично нескінченний. Тому можна визначити кількісний показник явищ практично в будь-якій точці карти. На практиці ж використовують обмежене число точок або вибірку. В цілому всі види вибірок, що зустрічаються в географічних дослідженнях при роботі з картами, звичайно зводять до основних чотирьох способів відбору: 1) проста випадкова вибірка; 2) районована вибірка; 3) систематична вибірка; 4) районована систематична неврівноважена вибірка. Крім того, досить часто застосовують найпростіший спосіб — систематичну вибірку, для отримання якої використовують елементарну точкову палетку.

1. *Проста випадкова вибірка.* Координати кожної точки в цій вибірці визначаються парою випадкових чисел за таблицею випадкових чисел.

2. *Систематична вибірка.* Дана вибірка здійснюється по відомій сітці квадратів контрольних точок. Координати першої точки вибираються за допомогою таблиці випадкових чисел, а інші точки наносяться систематично. Різновидом систематичної вибірки є контрольні точки, що наносяться на перетини картографічної сітки.

3. *Районована вибірка.* Якщо територія, що вивчається, на карті має вільні природні географічні райони, то вибірку слід проводити з урахуванням цієї особливості районів. У такому разі проводять межу (межі), а число точок в кожному районі вибирається пропорційним його площі.

4. *Районована систематична неврівноважена вибірка.* Ця вибірка, по суті, є комбінацією систематичної та районованої вибірок.

Класифікація кількісних показників у фізичній географії. Більшість кількісних показників у географії умовно можна розділити на три групи: 1) прості показники; 2) співвідносні показники; 3) показники географічної комплексності.

Прості — це показники *розміру* (довжина, ширина, діаметр, площа, висота, глибина, температура і таке інше), *маси, ваги, складу* (у відсотках або частках від одиниці), показники *часу, простору* (координати x, y, z). Вони можуть бути одержані в процесі вимірювання. Це той початковий матеріал, який служить основою для визначення всіх інших показників.

Співвідносні — це показники, одержані зі співвідношення простих показників. Наприклад, *швидкість* $V = S / t$, де S — довжина або шлях, м; t — час, сек.; ухил схилу $I = \Delta H / L$, де ΔH — перепад висот, а L — довжина схилу.

Окремим випадком співвідносних показників є відносний показник. Відносний показник або відносна величина є часткою від ділення двох порівнюваних показників, що мають однакову розмірність. Відносні величини можна представити в різній формі: а) у вигляді простого кратного відношення, що показує, в скільки разів порівнювана величина більше або менше; б) у відсотках; в) у проміллі. Наприклад, проміллі та продециміллі застосовують в тих випадках, коли бажають точніше виразити відношення двох величин, тобто коли чисельник надзвичайно малий в порівнянні зі знаменником. У фізичній географії такі показники, як солоність поверхневих і підземних вод, ухили схилів і поздовжній ухил водотоків обчислюються в проміллі.

Показники географічної комплексності — це синтетичні показники, структура яких заснована на географічній логіці. Ці показники неможливо створити, не знаючи географічної логіки. Такі показники записані в символах математики, але в своїй основі містять не математичну, а географічну сутність. До них відносяться різного роду безрозмірні показники (коефіцієнти, індекси) континентальності, аридності, зволоженості, сухості, сапробності, розораності, еродованості, забрудненості тощо.

Наприклад, показник континентальності клімату. Континентальність клімату визначається амплітудою температур (A_{ϕ}^0 і A_{ϕ}^0) повітря. Чим більше ця різниця, тим континентальність клімату вища (для кожної широти місцевості). Показник континентальності клімату (по Хромову) дорівнює:

$$P_{\kappa} = \frac{A_{\phi}^0 - A_{\phi}^0}{A_{\phi}^0} = \frac{A_{\phi}^0 - 5,4 \cdot \sin \phi}{A_{\phi}^0} \quad (5.1)$$

де A_{ϕ}^0 — фактична амплітуда температур в даному місці, $A_{\phi}^0 = 5,4 \cdot \sin \phi$ — величина амплітуди температури повітря на даній широті (ϕ), яка було б над океаном за повної відсутності впливу континентів.

Індекс сухості — це відношення радіаційного балансу території до річної суми опадів на тій же площі (вираженої в калоріях тепла, необхідного для випаровування річної кількості опадів):

$$K_{ic} = \frac{R}{L \cdot X} \quad (5.2.)$$

де R – річний радіаційний баланс; L – прихована теплота випаровування, Дж; X – річна сума опадів, мм. При $K_{ic} = 1$ можливість випаровування приблизно відповідає кількості опадів. При $K_{ic} = 0,45$ клімат характеризується як надмірно вологий; від 0,45 до 1,00 – як вологий; від 1,00 до 3,00 як недостатньо вологий; більше 3,00 – сухий/

Гідротермічний коефіцієнт (ГТК). Це емпіричне співвідношення між кількістю атмосферних опадів, які випали в межах даної території за рік або який-небудь сезон, і випаровуваністю. Він використовується для кількісної оцінки ступеня зволоженості території:

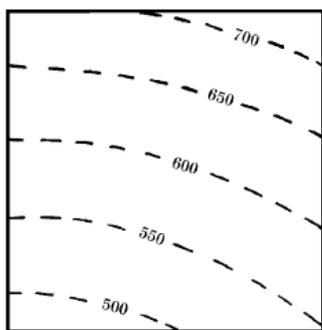
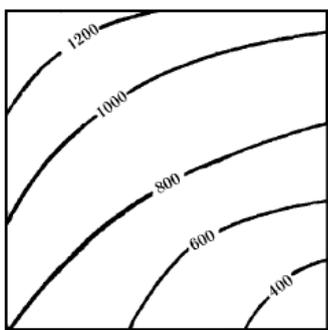
$$\text{ГТК} = \frac{\sum X}{B} \quad (5.3)$$

5.3. Використання коефіцієнта кореляції для оцінки тісноти зв'язку при аналізі карт ізоліній

Форма і тіснота взаємозв'язку між двома явищами, зображеними на картах в кількісній формі, оцінюється парним коефіцієнтом кореляції (для випадку прямолінійного зв'язку) або кореляційним відношенням (для випадку криволінійного зв'язку). Наявність зв'язку між декількома нескладними явищами встановлюється за допомогою коефіцієнта множинної кореляції, а зв'язок між двома якими-небудь явищами при виключенні третього оцінюється частинним коефіцієнтом кореляції.

Нехай стоїть задача досліджувати взаємозв'язок, наприклад, між рельєфом місцевості і опадами за картами ізогіпс (рис. 5.1) і ізогієт (рис. 5.2). Вирішення задачі розіб'ємо на декілька етапів. На першому етапі аналізу (1) складають вибірку (для чого можна скористатися простою систематичною вибіркою). Викреслену на кальці елементарну палетку послідовно накладають на карту горизонталей рельєфу (ізогіпс), а потім опадів (ізогієт) і одержують комбіновану карту (рис. 5.3).

У точок комбінованої (комбінаційної) карти, крім порядкового номера, вписують значення висоти місцевості (верхнє число) і кількості опадів (нижнє число в круглих дужках).



$\frac{1250}{(720)}$	1	$\frac{1200}{(670)}$	2	$\frac{1150}{(640)}$	3	$\frac{1050}{(610)}$	4	$\frac{1020}{(580)}$	5	$\frac{1000}{(550)}$	6
$\frac{1180}{(700)}$	7	$\frac{1080}{(660)}$	8	$\frac{1000}{(630)}$	9	$\frac{950}{(600)}$	10	$\frac{900}{(560)}$	11	$\frac{900}{(530)}$	12
$\frac{1080}{(690)}$	13	$\frac{950}{(650)}$	14	$\frac{900}{(615)}$	15	$\frac{850}{(580)}$	16	$\frac{800}{(550)}$	17	$\frac{760}{(520)}$	18
$\frac{970}{(680)}$	19	$\frac{880}{(640)}$	20	$\frac{800}{(610)}$	21	$\frac{750}{(570)}$	22	$\frac{660}{(540)}$	23	$\frac{620}{(500)}$	24
$\frac{880}{(670)}$	25	$\frac{780}{(640)}$	26	$\frac{700}{(600)}$	27	$\frac{600}{(570)}$	28	$\frac{520}{(535)}$	29	$\frac{460}{(495)}$	30
$\frac{800}{(660)}$	31	$\frac{700}{(635)}$	32	$\frac{600}{(595)}$	33	$\frac{500}{(565)}$	34	$\frac{410}{(530)}$	35	$\frac{360}{(490)}$	36

Рис. 5.1. Карта горизонталей рельєфу

Рис. 5.2. Карта ізогієт

Рис. 5.3. Комбінаційна карта

Складена таким чином таблична форма служить вихідним матеріалом для подальшого графічного аналізу. Графічна форма визначення зв'язку (як не раз вже наголошувалося) має широке застосування в географії. Якщо, кінець кінцем зв'язок буде представлений у вигляді рівняння, все одно необхідно заздалегідь здійснити графічний аналіз, який дасть наочне уявлення про залежність явищ. При достатньо тісному зв'язку відпадає необхідність в аналізі впливу інших змінних на зв'язок. Таким чином, графічне зображення явищ, що вивчаються, дозволяє не тільки встановити наявність або відсутність зв'язку між ними, але і вивчити характер цього зв'язку або вивчити форму зв'язку і її тісноту.

2. На основі комбінаційної карти (або безпосередньо за початковими даними) складається таблиця вибірових показників (табл. 5.1).

Складена таким чином таблична форма служить вихідним матеріалом для подальшого графічного аналізу. Графічна форма визначення зв'язку має широке застосування в географії. Якщо, кінець кінцем зв'язок буде представлений у вигляді рівняння, все одно необхідно заздалегідь здійснити графічний аналіз, який дасть наочне уявлення про залежність явищ. При достатньо тісному зв'язку відпадає необхідність в аналізі впливу інших змінних на зв'язок. Таким чином, графічне зображення

явиш, що вивчаються, дозволяє не тільки встановити наявність або відсутність зв'язку між ними, але й вивчити характер цього зв'язку або вивчити форму зв'язку і її тісноту.

3. За даними таблиці вихідних даних (табл. 5.1) побудуємо графік, на якому зв'язок представлений у вигляді прямої лінії (рис. 5.4). Далі визначаємо тісноту зв'язку опадів з висотою місцевості за формулою (5.4):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(H_i - \bar{H})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot \Delta H_i}{n \sigma_x \cdot \sigma_H}, \quad (5.4)$$

Де: \bar{x} – середня кількість опадів на досліджуваній території, \bar{H} – середня висота місцевості, σ_x , σ_H – середні квадратичні відхилення x і H від середніх величин \bar{x} , \bar{H} .

Таблиця 5.1.

Таблиця вихідних даних

№ п/п	H, м	X, мм	№ п/п	H, м	X, мм	№ п/п	H, м	X, мм
1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1250	720	13	1080	690	25	880	670
2	1200	670	14	950	650	26	730	640
3	1150	640	15	900	615	27	700	600
4	1050	610	16	850	580	28	600	570
5	1020	580	17	800	550	29	520	535
6	1000	550	18	760	520	30	460	495
7	1180	700	19	970	680	31	300	660
8	1080	660	20	880	640	32	700	635
9	1000	630	21	800	610	33	600	595
10	950	600	22	750	570	34	500	565
11	900	560	23	660	540	35	410	530
12	900	530	24	620	500	36	360	490

Величина коефіцієнту кореляції для прикладу, що розглядається, за виконаними розрахунками складає $r = 0,79$. Якщо досліджувана залежність між рельєфом і опадами виявиться криволінійною, то для оцінки тісноти зв'язку необхідно використовувати кореляційне відношення або ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена.

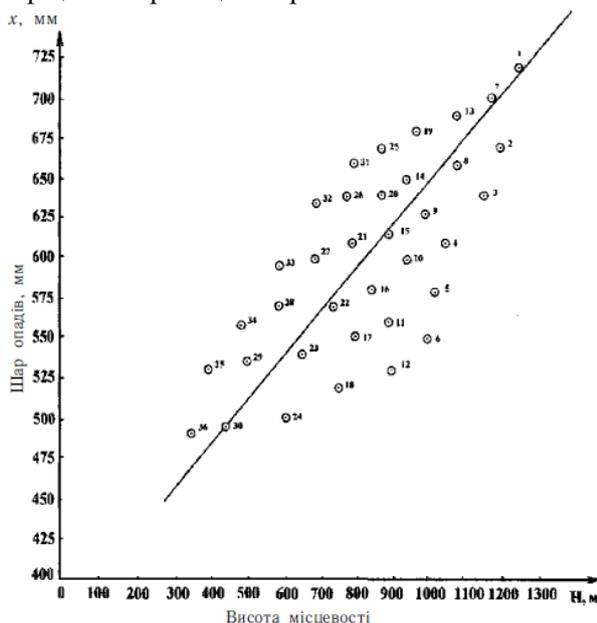


Рис. 4. Зв'язок річного шару атмосферних опадів (x , мм) з висотою місцевості (H , м): біля точок – їх порядкові номери (1-36)

5. Після здійснення розрахунку коефіцієнта кореляції необхідно відповісти на таке важливе запитання: наскільки досліджуваний зв'язок між опадами і рельєфом достовірно існує? Для встановлення достовірності зв'язку спочатку визначають похибку коефіцієнта кореляції m_r , яка

розраховується за формулою:

$$m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-2}}. \quad (5.5)$$

Підставляючи в цю формулу обчислене значення коефіцієнта кореляції $r = 0,79$ і $n = 36$, одержуємо величину середньої квадратичної похибки, яка дорівнює $m_c = 0,05$.

Далі розраховується критерій надійності, достовірності і значущості коефіцієнта кореляції (критерій Стьюдента) за формулою:

$$t_{r_0} = \frac{|r|}{m_r}. \quad (5.6)$$

Розрахункове значення t-критерію Стьюдента порівнюють з табличним (критичним) значенням.

Табличне значення $\left(t_{r_0} = \frac{0,79}{0,05} = 15,8 \right)$ t-критерію визначається за спеціальною таблицею (табл. 2, ст. 130). Наприклад, при 5%-му рівні значущості і числі ступенів свободи він складає 2,04.

В прикладі, що розглядається, розрахункове значення критерію (15,8) > табличного значення (2,04). Це свідчить про те, що дійсно існує тісний і достовірний зв'язок між опадами і висотою місцевості на досліджуваній території. Іншими словами, отримані результати вказують на те, що коефіцієнт кореляції достатньо надійно відображає залежність опадів від рельєфу місцевості в цілому для території, що вивчається. Рівняння отриманої залежності ($x = 0,27H + 370$) дозволяє розраховувати (прогнозувати) величину шару опадів за даними про висоту місцевості.

Очевидно, можливі випадки, коли між двома природними чинниками (наприклад, опадами і висотою місцевості) зв'язок дуже слабкий або зовсім відсутній. В цьому випадку необхідно додатково включити в кореляційний аналіз третю (четверту, п'яту і т. д.) змінну величину. В якості третьої змінної тут можливо було б використати, наприклад, експозицію схилів, яка також легко визначається за картою горизонталей рельєфу місцевості. Крім того, можливо використовувати характеристики підстилаючої поверхні (залісненість і таке інше). Таким чином, при наявності зв'язку між трьома і більше змінними (картографічними зображеннями) необхідно використовувати елементи теорії множинної кореляції. В той же час слід зазначити, що при вивченні просторової кореляції звичайно виконують побудову карти ізокорелят.

5.4. Карти ізокорелят

Тісноту кореляційних зв'язків між парою явищ, розповсюджених по території будь-якого досліджуваного району, в простішому випадку можна виявити візуально, зіставляючи їх картографічне зображення. Ступінь співпадіння горбів однієї ознаки з горбами другої характеризує ступінь позитивної (прямої) залежності між явищами, що вивчаються. Співпадіння протилежних елементів двох явищ характеризує негативні (зворотні) зв'язки. При цьому візуальне визначення тісноти зв'язку дає наближене уявлення про величину кореляції, за допомогою чого можна судити лише про те, де явища взаємопов'язані в більшій мірі, а де – в меншій.

Тісноту зв'язку між двома явищами, які зображені на карті за допомогою ізоліній, можна охарактеризувати також кутом, під котрим ізолінії (точніше дотичні до них) підходять одна до одної. При співпадінні (паралельності) ізоліній двох явищ зв'язок буде абсолютним, тобто коефіцієнт кореляції $r = 1$; якщо ізолінії перетинають одна одну під прямим кутом, то зв'язок повністю відсутній ($r = 0$). Функція, яка змінюється від 1 (кут між ізолініями $\alpha = 0^\circ$) до 0 ($\alpha = 90^\circ$), відповідає величині косинусу кута. В будь-якій точці карти коефіцієнт кореляції визначається кутом перетину ізоліній $r_c = (\cos \alpha)$. Коефіцієнт кореляції r_c показує тісноту зв'язку тільки в даній точці.

На сполученій карті (рис. 5) показані горизонталі (безперервні лінії) й ізогієти (пунктирні лінії). Для визначення тісноти зв'язку між рельєфом і опадами в будь-якій точці А необхідно з цієї точки провести лінію АВ до найближчої ізогієти за коротшою відстанню і перпендикулярно дотичній в точці перетину. Таким же чином проводиться лінія АС (до найближчої горизонталі і перпендикулярно дотичній в точці перетину). Косинус кута α між лініями АВ і АС є числовою характеристикою показника тісноти взаємозв'язку. Опускаючи перпендикуляр із точки С на пряму лінію АВ, одержуємо $r_c = \cos \alpha = AB/AC = 0,79$.

У тих випадках, коли необхідно визначити тісноту зв'язку між двома явищами в просторовому аспекті, виконують побудову ізоліній, які з'єднують точки з однаковими значеннями коефіцієнта

кореляції (ізокореляти). Карти, побудовані таким способом, носять назву карти *ізокорелят*. Для їх побудови необхідно отримати значення r_c в кожній точці елементарної палетки, як це показано на рис. 5. Потім виміряні величини r_c наносять за тими ж значеннями координат точок на карту і по них проводять ізокореляти (рис. 6). В наведеному прикладі ізокореляти проведені з кроком 0,05, тобто зі значеннями $r_c = 0,60; 0,65; 0,70; 0,75; 0,80; 0,85; 0,90$.

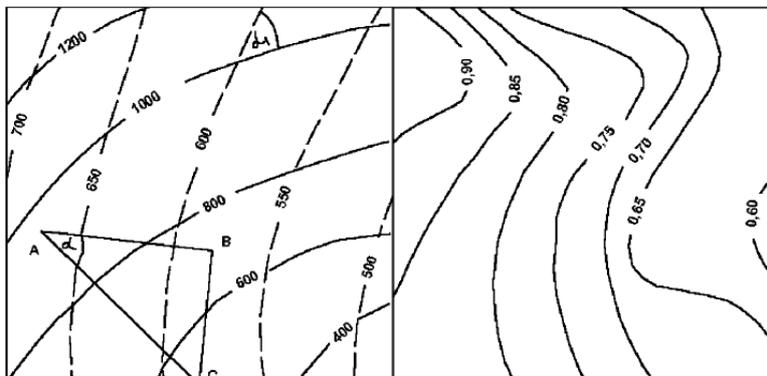


Рис 5. Комбінована карта горизонталей і ізогіет Рис. 6. Карта ізокорелят

5.5. Показники тісноти зв'язку між якісними ознаками

Коефіцієнт кореляції і кореляційне відношення можуть бути обчислені у тому випадку, коли обидва порівнювані показники є кількісними. При визначенні тісноти зв'язку між показниками, дані за якими свідчать тільки про наявність або відсутність у об'єкта його властивостей, використовують різні непараметричні показники асоціації – тетрагоричний показник зв'язку, коефіцієнт асоціації Юла й ін. Прикладами можуть послужити наявність або відсутність радіації, важких металів або інших забруднювачів на території, що вивчається, вміст яких перевищує ГДК.

Тетрагоричний показник. Для оцінки ступеня тісноти зв'язку між якісними ознаками x і y , що мають число градацій 2, часто використовують так званий тетрагоричний показник, запропонований К. Пірсоном в 1901 г. Розглянемо методику розрахунку даного показника. Зв'язок між двома альтернативними ознаками x і y виявляється у тому, що наявність однієї ознаки може якоюсь мірою відповідати переважній появі або не появі іншої ознаки. Якщо наявність ознак x і y позначити знаком плюс, а їх відсутність знаком мінус, то кореляційна матриця, що відображає зв'язок двох альтернативних ознак, може бути представлені у вигляді чотирьохклітинної таблиці (табл. 5.2). У цій таблиці стоять частоти: f_a – наявності обох ознак; f_b – наявності ознаки y і відсутності ознаки x ; f_c – відсутності ознаки y і наявності ознаки x і f_d – відсутності обох ознак (x і y).

Підсумкові частоти f_x і f_y характеризують загальне число випадків, коли ознаки X і $Y \in (f_{x+1}$ і $f_{y+1})$ або відсутні (f_{x-1} і f_{y-1}), а загальний об'єм кореляційної таблиці складає:

$$n = f_a \pm f_b \pm f_c \pm f_d = f_{y(+)} + f_{y(-)} = f_{x(+)} + f_{x(-)}. \quad (5.7)$$

Табл. 5.2

Схема чотирьохклітинної кореляційної таблиці

		Ознака x		f_y
		Ознака присутня (+)	Ознака відсутня (-)	
Ознака y	Ознака присутня (+)	$f_a = 56$	$f_b = 5$	$f_{y(+)} = f_a + f_b = 61$
	Ознака відсутня (-)	$f_c = 17$	$f_d = 22$	$f_{y(-)} = f_c + f_d = 39$
f_x		$f_{x(+)} = f_a + f_c = 73$	$f_{x(-)} = f_b + f_d = 27$	$n = f_a + f_b + f_c + f_d = 100$

Чисельне значення тетрагоричного показника зв'язку (τ_T) визначається за формулою (5.8):

$$r_T = \frac{|f_a - f_b| - \frac{n}{2}}{\sqrt{(f_a + f_b)(f_c + f_d)(f_a + f_c)(f_b + f_d)}}, \quad (5.8)$$

де f_a, f_b, f_c, f_d – частоти чотирьохклітинної кореляційної таблиці; n — сумарна частота за стовпцями (або рядками).

Цей показник (r_T) за своїм значенням аналогічний коефіцієнту кореляції. Величина r_T може приймати значення від -1 до +1 (ці крайні значення відповідають наявності функціонального зв'язку), відсутності зв'язку відповідає $r_T = 0$.

5.6. Використання прийомів теорії інформації у гідрологічних дослідженнях

Теорія інформації розроблена для вирішення різних задач техніки зв'язку, машинної пам'яті. В теперішній час прийоми інформаційно-логічного аналізу широко застосовуються в різних галузях природознавства: у фізиці, хімії, біології, геології, зокрема, в географії і геоecології. За допомогою теорії інформації можна виміряти ступінь складності і різноманітності природних комплексів, оцінити кількість інформації, яка передається від одного компонента до іншого і таке інше. Крім того, ці прийоми використовуються для оцінки ступеня однорідності, просторової диференціації і взаємної відповідності явищ, що вивчаються по картах.

Інформація. В даний час існує ціла низка визначень інформації. Наприклад, "інформація" – це відомості, які передаються одними людьми іншим, а також сам процес передачі і отримання цих відомостей. При цьому передавана окремими повідомленнями інформація залежить від тієї множини, з якої вона вибрана. Або інше визначення: "Інформація" – це будь-яка різноманітність не тільки передана, але й та, що зберігається в структурі речовини.

Вважається, що інформацію несуть будь-які об'єкти і процеси, які підкоряються статистичним закономірностям. Статистична теорія інформації займається вивченням ступеня невизначеності, зв'язку її з ймовірністю.

Важливою властивістю інформації є те, що кожне часткове повідомлення вибирається з деякої безлічі можливих повідомлень. Таким чином інформація в цьому значенні повинна знаходитися у зв'язку з поняттям вибору безлічі можливих результатів.

В математиці кількість інформації, переданої від одного об'єкта до іншого, вимірюється кількістю усуненої невизначеності. *Невизначеність* або *ентропія* одержує точний кількісний вираз у всіх випадках, коли ми можемо назвати ймовірність, з якою відбудеться очікувана подія. Отже: *невизначеність* виражається через ймовірність.

В наш час прийоми теорії інформації широко використовуються фізико-географами, геоморфологами й іншими фахівцями, наприклад, для оцінки ступеня однорідності просторової диференціації і взаємної відповідності явищ, що вивчаються по картах. Теорія інформації, розроблена для вирішення задач техніки зв'язку і машинної пам'яті, незабаром вийшла за рамки вказаних проблем і зараз активно застосовується в різних областях наукового знання, у тому числі і в географії. Цьому сприяють деякі чудові властивості, якими володіє найважливіша інформаційна функція – ентропія (H). Ентропія характеризує невизначеність деякої групи подій (A) і записується у вигляді:

$$H(A) = H(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = -q \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i, \quad (5.9)$$

де H – ентропія ймовірностей (P_n), яка може виступати як міра складності (міра різноманітності) групи подій A ; P_i – ймовірність або частка i -го компоненту (ймовірність окремої події) в сукупності ($P_i = m_i/n$, де m_i — число однакових подій); i – окремі події в групі A ; n – загальне число подій; q – стала (інформаційний коефіцієнт). Дана формула отримала назву рівняння К. Шеннона.

У теорії інформації значення q прийнято брати рівним -1. Знак мінус ставиться для того, щоб значення функції завжди залишалось позитивним. Крім того, в теорії інформації прийнято використовувати двійкову систему числення, тому у багатьох випадках беруться логарифми ймовірностей при основі 2. При цьому результатом обчислень є кількість невизначеності (H) в бітах.

Одиниці вимірювання ступеня невизначеності досліджу. Ентропія $[H(A)]$ – це міра невизначеності випробування (досліджу) за визначенням можливого значення випадкової величини, залежна від числа можливих результатів і ймовірності кожного результату. За міру невизначеності досліджу (показник ентропії, H), що має k рівноймовірних результатів, приймається число $\log_a k$. На практиці найчастіше користуються логарифмами при основі два ($a = 2$), тобто $f(k) = \log_2 k$. В даному

випадку за одиницю вимірювання (ступені невизначеності) приймається невизначеність випробування, що має тільки два рівноймовірних результати. Наприклад, при підкиданні монети однакова ймовірність появи "орла" або "решки" (аверсу або реверсу) складає $P_1 = P_2 = 1/2$. Така одиниця вимірювання невизначеності називається двійковою одиницею – біт. Біт (у перекладі з англійської) – двійковий знак.

$$H(A) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} 2(\log_2 \frac{1}{2}) = \log_2 2 = 1 \text{ біт} \quad (5.10)$$

Якщо користуватися десятковими логарифмами, то за одиницю ступеня невизначеності приймається невизначеність досліду, що має 10 рівноймовірних результатів. Така десяткова одиниця приблизно в 3,32 рази крупніша за двійкову одиницю ($\log_2 10 = 3,32$). Ця десяткова одиниця носить назву "Хартлі". Для переведення Хартлі (десяткових одиниць) в біти отриману величину ділять на коефіцієнт $\lg 2 = 0,30103$.

3. При застосуванні натуральних логарифмів ентропія виражається в нітах. Якщо величина ентропії отримана із застосуванням натуральних логарифмів, а її вимагається перевести в біти (у двійковій системі, то цей розрахунок здійснюється шляхом розподілу величини в нітах

$$\ln 2 = 0,69315, \text{ тобто } \frac{N \text{ ніт}}{\ln 2} = M \text{ біт} .$$

Щоб перевести логарифм числа x з основою b в логарифм з основою a , використовується формула перерахунку:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad (5.11)$$

де $\log_a x$ – значення логарифму x на основі a , $\log_b x$ – значення логарифму x на основі b , $\log_b a$ – значення логарифму a на основі a . Попутно відзначимо, що 8 біт складає 1 байт, а 1024 байт приблизно відповідає 1 кілобайту.

Функція ентропії володіє наступними важливими властивостями, які дозволяють використовувати її при вирішенні багатьох географічних задач:

1) при $n = 1$ вона обертається в нуль;

2) зі зростанням числа подій n функція безперервно збільшується, досягаючи максимуму у разі

рівності ймовірностей $\left(P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = \frac{1}{n}\right)$. Отже, максимальна невизначеність характеризує рівноймовірні події і чисельно дорівнює логарифму числа цих подій;

3) крім того, в теорії інформації прийнято вважати, що при $n = 0$ функція ентропії дорівнює нулю.

Перераховані властивості дозволяють застосовувати ентропію, наприклад, для характеристики однорідності (неоднорідності) картографічного зображення якого-небудь явища, процесу, природно-територіального комплексу і таке інше.

Рекомендована література та Інтернет-ресурси

Основна

1. Ігошин М.І. Математичні методи і моделювання у фізичній географії: Підручник. Одеса: Астропринт, 2005. 464 с.
2. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навчальний посібник. К.: Либідь, 2003. 208 с.
3. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: Навчальний посібник. К.: Видавничий дім “КМ Академія”, 2002. 203 с.
4. Самойленко В.М. Математичне моделювання в геоекології: Навчальний посібник. К.: ВПЦ «Київський університет», 2003. 206 с.
5. Самойленко В.М. Ймовірні математичні методи в геоекології: Навчальний посібник. К.: Ніка-Центр, 2002. 404 с.

Додаткова

1. Богобоящий В.В., Курбанов К.Р., Палій П.Б. Принципи моделювання та прогнозування в екології.: Підручник. К.: Центр навчальної літератури, 2004. 216 с.
2. Фесюк В.О., Пінчук Р.О. Теоретико-методологічні основи кількісної оцінки екологічної оптимізації водокористування міст. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія «Екологія». 2019. №4. С. 51-57.
3. Фесюк В.О., Мельник В.І. Кількісна оцінка взаємозв'язку скидів забруднених стоків і якості води в річці. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія «Екологія». 2019. №4. С.43-50.
4. Фесюк В. О., Мороз І. А. Сучасний стан забруднення атмосферного повітря м. Луцька. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Геологія. Географія. Екологія». 2021. Випуск. 54. С. 250–255.
5. Фесюк В.О., Полянський С.В., Копитюк Т.В. Методика та практична імплементація застосування даних ДЗЗ для моніторингу евтрофікації водойм (на прикладі Турського озера) // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: географія. №1. 2022. С.159-166.
6. Barskyi Y. M., Fesyuk V. O., Pogrebnyi T. G., Golub G. S. Using the cluster analysis in socio-geographical researches. Acta Geographica Silesiana. 2016. Vol. 22. P. 5–9.
7. Fesyuk V. O., Plyin L. V., Moroz I. A., Plyina O. V. Environmental assessment of water quality in various lakes of the Volyn region, which is intensively used in recreation. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Геологія. Географія. Екологія». 2020. № 52. С. 236–250.
8. Fesyuk V. O., Moroz A. I., Chyzhevska L. T., Karpiuk Z. K., Polianskyi S. V. Burned peatlands within the Volyn region: state, dynamics, threats, ways of further use. Journal of Geology, Geography and Geoecology. 2020. Vol. 29. № 3. P. 483–494
9. Fedoniuk M. A., Kovalchuk I. P., Fesyuk V. O., Kirchuk R. V. , Merlenko I. M. , Bondarchuk S. P. Differences in the assessment of vegetation indexes in the EO-Browser and EOS LandViewer services (on the example of Lutsk district lands). Conference Proceedings, International Scientific Conference “Geoinformatics–2021”, May 2021. URL: https://eage.in.ua/?page_id=2414

Інтернет-ресурси

1. <https://prometheus.org.ua>.
2. <https://www.coursera.org>
3. <https://www.udemy.com>

Навчально-методичне видання

Фесюк Василь Олександрович

Кількісні методи в гідрології: курс лекцій для магістрів спеціальності Е4 Науки про Землю ОПП Гідрологія.

*Навчально-методичне видання
для студентів географічного факультету*

Друкується в авторській редакції

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Обсяг 5,35 ум. друк. арк., 5,09 обл.-вид. арк.