М. Є. Коренков, І. П. Головенко

Цілі функції

(спецкурс)

Луцьк – 2007

УДК 517.9(075.8)

ББК 22.162я73

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського державного університету імені Лесі Українки (протокол №1 від 25 вересня 2003 року).

Рецензенти:

Середа В. Ю., професор кафедри вищої математики Луцького технічного університету, канд. фіз.-мат. наук;

Філозоф Л. І., завідуючий кафедрою математичного аналізу ВНУ імені Лесі Українки, канд. фіз.-мат. наук.

Коренков М. Є., Головенко І. П.

К66 Цілі функції (спецкурс). – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2007. – 42 с.

Розглянуто питання про основні характеристики росту цілої функції та про зв'язок цих характеристик із коефіцієнтами її степеневого розкладу.

УДК 517.8 (075.8)

ББК 22.162я73

Передмова

Цілі функції утворюють важливий підклас всього класу аналітичних функцій і вони мають широкі застосування. В цьому курсі лекцій розглянуто одне із основних питань теорії цілих функцій – побудова шкали росту цілих функцій. Тут показано, як вводяться такі характеристики, як порядок та величина типу цілої функції. Розглянуті також питання про зв'язок вказаних характеристик із коефіцієнтами степеневого розкладу цілої функції і про порядок і величину типу похідної цілої функції.

Даний спецкурс можна рекомендувати студентам університету спеціальності ,, математика’’.

Автори вдячні студентам математичного факультету ВНУ імені Лесі Українки Павлісюк А. С., Лелюшок В. М., Іванчук М. Б., Бірук К. І., Малашук Л. М. за якісну підготовку тексту курсу лекцій до опублікування.

§1. Верхня та нижня границі послідовності.

Позначимо $\overline{R} := R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Елемент a, $a \in \overline{R}$, називається частинною границею послідовності дійсних чисел (x_n), якщо існує підпослідовність (x_{n_k}) цієї послідовності така, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Позначимо через A сукупність всіх частинних границь послідовності (x_n). Відомо, що для довільної послідовності дійсних чисел (x_n) множина A є не порожня, $A \neq \varnothing$. Якщо послідовність (x_n) обмежена, то множина A містить хоча б одне дійсне число. Якщо послідовність (x_n) не обмежена зверху (знизу), то $+\infty \in A$ $(-\infty \in A)$. Позначимо $A := A \setminus \{-\infty, +\infty\}$.

Верхня границя послідовності (x_n) означається з допомогою рівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n := \begin{cases} +\infty, \text{ÿêù î } +\infty \in \text{À}; \\ \sup A, \text{ÿêù î } (x_n) \text{ обмежена зверху і } A \neq \{-\infty\}; \\ -\infty, \text{ÿêù î À} = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Нижня границя послідовності (x_n) означається з допомогою рівності

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n := \begin{cases} -\infty, \text{ÿêù î } -\infty \in \text{À}; \\ \inf A, \text{ÿêù î } (x_n) \text{ обмежена знизу і } A \neq \{+\infty\}; \\ +\infty, \text{ÿêù î À} = \{+\infty\}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що верхня та нижня границі (скінченні або нескінченні) існують для кожної послідовності (x_n) і завжди $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Якщо послідовність (x_n) обмежена, то її верхня і нижня границі скінченні, причому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup A \in R, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf A \in R$. Якщо послідовність (x_n) така, що $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$, то $A = \{a\}$ і в цьому випадку $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Можна показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{R} \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$.

Отже, числова послідовність (x_n) збігається до числа $a, a \in R$, тоді і лише тоді коли $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$.

Можна також показати, що для довільної послідовності (x_n) елементи $a := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ та $b := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ є частковими границями послідовності (x_n), $\{a, b\} \subset A$. Отже, якщо послідовність (x_n) обмежена, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \min A$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \max A$.

Часто використовуються наступні твердження.

Теорема 1. Число $b, b \in R$, є верхньою границею послідовності (x_n) тоді і лише тоді коли виконуються дві умови:

1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n > n_0)(x_n < b + \varepsilon)$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)(\exists n' = n'(\varepsilon; n_0) \in N)(n' > n_0 \wedge x_{n'} > b - \varepsilon)$.

Теорема 2. Число $a, a \in R$, є нижньою границею послідовності (x_n) тоді і лише тоді коли виконуються дві умови:

3) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n > n_0)(x_n > a - \varepsilon)$;

4) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)(\exists n' = n'(\varepsilon; n_0) \in N)(n' > n_0 \wedge x_{n'} < a + \varepsilon)$.

Можна показати, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ для довільної послідовності (x_n).

Для довільних послідовностей $(x_n), (y_n)$ справедливі співвідношення

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

при умові, що операція додавання всіх вказаних виразів має сенс. Звідси зокрема випливають рівності

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

при умові, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (скінченна або рівна одному із символів $-\infty; +\infty$).

Можна показати, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k | k \ge n\},$$

коли послідовність (x_n) обмежена зверху, і

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\left\{x_k \middle| k \ge n\right\},$$

коли послідовність (x_n) обмежена знизу.

<u>Приклади.</u> 1. Якщо $x_n = (-1)^n (n \in N)$, то $A = A = \{-1,1\}$, тому $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup A = 1, \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf\ A = -1$.

2. Якщо $x_n = n + (-1)^n n(n \in N)$, то $A = \{0,+\infty\}$, $+\infty \in A, A = \{0\}, A \ne \{+\infty\}$. Тому $\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf\ A = 0, \varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

3. Якщо $x_n = (-1)^n n\ \ (n \in N)$, то $A = \{-\infty,+\infty\}, -\infty \in A, +\infty \in A$. Тому $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty, \varliminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

<u>Зауваження.</u> Значно складніше доводяться співвідношення $\varliminf_{n\to\infty} \sin n = -1, \varlimsup_{n\to\infty} \sin n = 1$.

§2. Нижня та верхня границі функції.

Нехай дано функцію $f : E \to R, E \subset R$, і нехай x_0 - гранична точка множини $E, x_0 \in R$. Зафіксувавши число δ > 0, позначимо $\overset{0}{U}_E(x_0;\delta) := E \cap \left(\left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}\right)$.

Якщо функція f обмежена зверху на $\overset{0}{U}_E(x_0;\delta)$ при деякому $\delta > 0$, то верхня границя в точці x_0 означається з допомогою рівності

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) := \lim_{\delta\to+0} \sup\left\{ f(x) \middle| x \in \overset{0}{U}_E(x_0;\delta)\right\}.$$

Якщо функція f не обмежена зверху на $\overset{0}{U}_E(x_0;\delta)$ при кожному

$\delta>0$, то вважають, що її верхня границя в точці x_0 дорівнює $+\infty$, $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = +\infty$.

Аналогічним способом можна означити і односторонні верхні границі функції f в точці x_0, $x_0 \in R$.

Якщо дана функція f: E→R обмежена знизу на $\overset{0}{U}_E(x_0;\delta)$ при деякому $\delta>0$, то її границя в точці x_0, $x_0 \in R$ означається з допомогою рівності

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) := \lim_{\delta\to+0} \inf\{f(x)|x \in \overset{0}{U}_E(x_0;\delta)\}.$$

Якщо функція f не обмежена знизу на $\overset{0}{U}_E(x_0;\delta)$ при кожному $\delta>0$, то

вважають, що її нижня границя в точці x_0 дорівнює $-\infty$, $\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = -\infty$.

Аналогічним способом можна означити і односторонні нижні границі функції f в точці x_0. Очевидно, завжди

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \le \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

Можна показати, що

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \in \overline{R} \Leftrightarrow \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=a,\ (x_0 \in R).$$

Отже, функція f : E→R має скінченну границю a в точці x_0, $x_0 \in R$, тоді і лише тоді, коли

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)=\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=a.$$

<u>Теорема 1</u>. Для того, щоб функція f : E→R мала в точці x_0, $x_0 \in R$, верхню границю рівну b, $\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=b$, $b \in R$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1) $(\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall\, x \in \overset{0}{U}_E(x_0;\delta))(f(x)<b+\varepsilon)$;

2)для кожного ε>0 існувала б послідовність (x_n), $x_n \in E$ $(n \in N)$, така, що $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ і $(\forall\, n \in N)(f(x_n)>b-\varepsilon)$.

Аналогічну теорему можна сформулювати для нижньої границі функції f в точці x_0, $x_0 \in R$.

Нехай функція f : E→R, E⊂R, визначена на множині E, для якої ∞ є гранична точка, тобто в множині $V(\infty;\Delta):=\,]-\infty;-\Delta[\,\cup\,]\Delta;+\infty[$ при кожному Δ>0 міститься нескінченна сукупність точок із E.Позначимо

$$V_E(\infty;\Delta):=V(\infty;\Delta)\cap E.$$

Якщо функція f обмежена зверху на $V_E(\infty;\Delta)$ при деякому Δ>0, то її верхня границя на ∞ означається з допомогою рівності

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} f(x):=\lim_{\Delta\to+\infty} \sup\{f(x) \mid x \in V_E(\infty;\Delta)\}.$$

Якщо функція *f* не обмежена зверху на $V_E(\infty;\Delta)$ при кожному $\Delta>0$, то вважають, що її верхня границя на ∞ дорівнює $+\infty$,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} f(x)=+\infty .$$

Аналогічно можна означити верхню границю функції *f* на $-\infty$ та на $+\infty$, які позначаються $\overline{\lim_{x\to-\infty}} f(x)$ та $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)$.В першому випадку потрібно взяти множину $V_E(-\infty;\Delta):=\left]-\infty,-\Delta\right[\cap E$ замість $V_E(\infty;\Delta)$, $\Delta>0$;в другому випадку – множину $V_E(+\infty;\Delta):=\left]\Delta,+\infty\right[\cap E$ замість $V_E(\infty;\Delta)$.

Якщо функція *f* обмежена знизу на $V_E(\infty;\Delta)$ при деякому $\Delta>0$, то її нижня границя на ∞ означається з допомогою рівності

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x):=\lim_{\Delta\to+\infty}\inf\{f(x)|x\in V_E(\infty;\Delta)\}.$$

Якщо функція *f* не обмежена знизу на $V_E(\infty;\Delta)$ при кожному $\Delta>0$, то вважають, що її нижня границя на ∞ дорівнює $-\infty$,

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, f(x)=-\infty .$$

Аналогічно можна означити нижню границю функції *f* на $-\infty$ та на $+\infty$, які позначаються відповідно $\underline{\lim_{x\to-\infty}}\, f(x)$ та $\underline{\lim_{x\to+\infty}}\, f(x)$.

Для верхньої та нижньої границі функції *f* на ∞, $+\infty$, $-\infty$ справедливі всі ті співвідношення, які були відмічені для випадку скінченної граничної точки x_0 множини E.Зокрема справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Для того, щоб число *a*, $a\in R$, було нижньою границею функції *f*: $E\to R$, $E\subset R$, на $+\infty$, тобто $\underline{\lim_{x\to+\infty}}\, f(x)=a$, необхідно і достатньо, щоб виконувались дві умови:

1) $(\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,\Delta=\Delta(\varepsilon)>0)\;(\forall\,x\in V_E(+\infty;\Delta))(f(x)>a-\varepsilon)$;

2) для кожного ε>0 існувала послідовність (x_n), $x_n\in E$ $(n\in N)$, така, що $x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ і $(\forall\,n\in N)(f(x_n)<a+\varepsilon)$.

Аналогічне твердження можна сформулювати для верхньої границі функції f на $+\infty$.

Символ $\alpha, \alpha\in\overline{R}$ називається частинною границею функції $f{:}E\to R, E\subset R$, в граничній точці x_0, $x_0\in R$, множини E, якщо існує послідовність (x_n), $x_n\in E$ $(n\in N)$, $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$, така, що $\exists\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$.

Можна показати ,що для функції f, яка обмежена на $\overset{0}{U}_E(x_0,\delta)$ при деякому δ>0 верхня та нижня границі функції f в точці x_0 дорівнюють відповідно найбільшій та найменшій частинній границі цієї функції в точці x_0.Якщо символ $+\infty$ є частинною границею функції f в точці x_0 ,то в цьому випадку $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)=+\infty$.І навпаки. З іншого боку, якщо символ $-\infty$ є частинною границею функції f в точці x_0, то в цьому випадку $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)=-\infty$.І навпаки. Аналогічні твердження справедливі і у випадку, коли один із символів ∞, $+\infty$, $-\infty$ є граничною точкою множини E, на якій визначена функція f.

Зазначимо, що для верхньої та нижньої границі функції в точці справедливі співвідношення подібні до тих, які вище були відмічені для верхньої та нижньої границі послідовності.

Приклади: 1. Якщо $f(x)=2\sin\frac{1}{x}, x\in E=R\setminus\{0\}$, то

$$\overline{\lim_{x\to 0}} f(x)=\lim_{\delta\to +0}\sup\left\{2\sin\frac{1}{x}\middle| x\in\left]0-\delta;0+\delta\right[\setminus\{0\}\right\}=\lim_{\delta\to +0}2=2,$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}}\, f(x)=\lim_{\delta\to +0}\inf\left\{2\sin\frac{1}{x}\middle| x\in\left]-\delta;\delta\right[\setminus\{0\}\right\}=\lim_{\delta\to +0}(-2)=-2.$$

2. Якщо $f(x)=x\cos x, x\in R,$ то функція f не обмежена як зверху так і знизу на $\left]\Delta;+\infty\right[$ та на $\left]-\infty;-\Delta\right[$ при кожному $\Delta>0.$

Тому $\overline{\lim_{x\to +\infty}} f(x)=+\infty,\ \underline{\lim_{x\to -\infty}}\, f(x)=-\infty.$

3. Для функції $f(x)=3^{\sin x}, x\in R,$ яка обмежена на R буде

$$\overline{\lim_{x\to +\infty}} f(x)=\lim_{\Delta\to +\infty}\sup\left\{3^{\sin x}\middle| x\in\left]\Delta;+\infty\right[\right\}=\lim_{\Delta\to +\infty}3=3,$$

$$\underline{\lim_{x\to +\infty}}\, f(x)=\lim_{\Delta\to +\infty}\inf\left\{3^{\sin x}\middle| x\in\left]\Delta;+\infty\right[\right\}=\lim_{\Delta\to +\infty}3^{-1}=\frac{1}{3}.$$

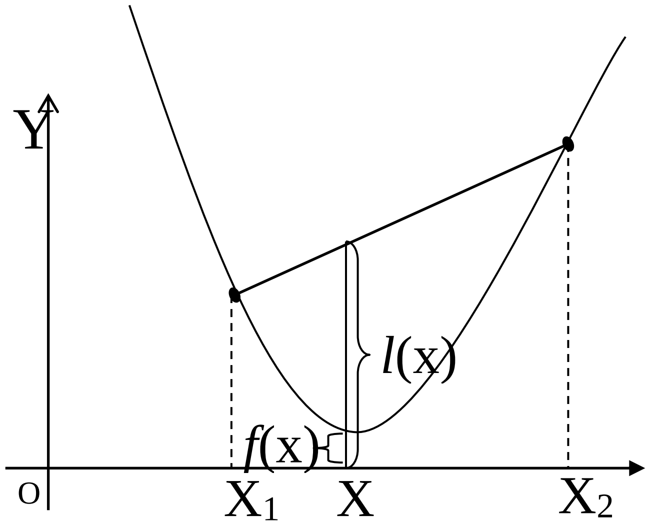
§3. Опуклі та вгнуті функції.

Нехай функція $f:\left]a,b\right[\to R$ визначена на обмеженому або необмеженому інтервалі $\left]a,b\right[, -\infty\le a<b\le+\infty.$

Функція f називається опуклою донизу або інакше опуклою, якщо

$$(\forall\{x_1,x_2\}\subset\left]a,b\right[)(\forall\alpha\in[0,1])(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)). \quad (1)$$

Геометричне тлумачення умови опуклості (1) роз'яснює малюнок 1, де $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, l(x) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), f(x) \le l(x), x_1 \le x \le x_2.$



Малюнок 1

Функція f називається строго опуклою донизу (строго опуклою) на $]a,b[$, якщо при $x_1 \ne x_2$ і в (1) виконується $\alpha \in]0,1[$ строга нерівність.

Функція f називається опуклою доверху (вгнутою) на $]a,b[$, якщо в (1) виконується протилежна нерівність. Якщо в (1) виконується строга протилежна нерівність, то функція f називається строго опуклою доверху (строго вгнутою) на $]a,b[$.

Якщо позначити $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, то дістанемо рівності $\alpha = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, 1-\alpha = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 < x < x_2).$ Тому умову опуклості донизу (опуклості) функції f на $]a,b[$ можна записати у вигляді

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \qquad (2)$$

де $x_1 < x_2$ і x довільна точка, $x_1 < x < x_2$. Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то (2) рівносильне умові

$$(x_2 - x)\, f(x_1) + (x_1 - x_2)\, f(x) + (x - x_1)\, f(x_2) \geq 0, \qquad (3)$$

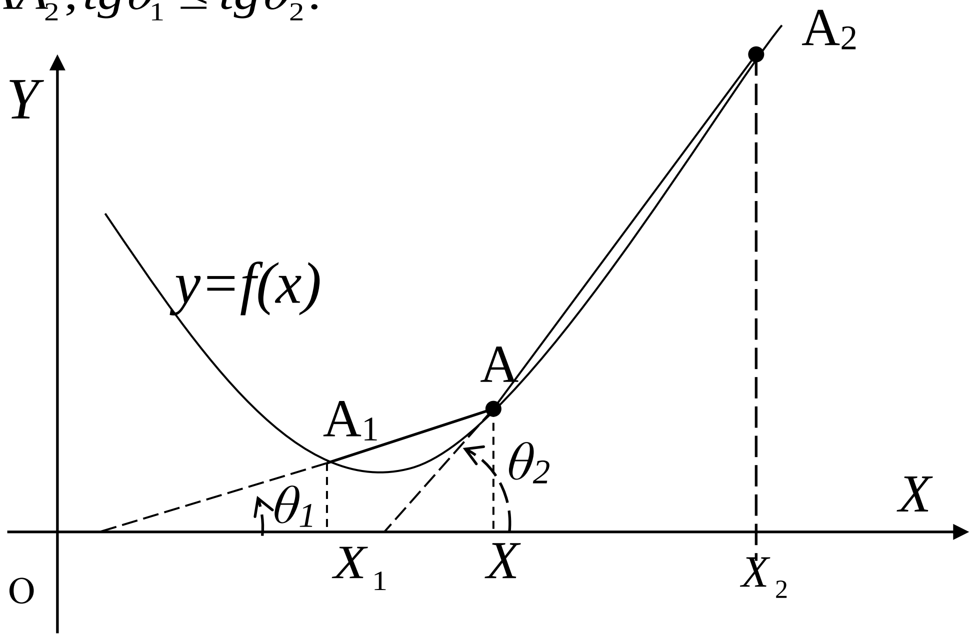
яка виконується для довільних x таких, що $x_1 \leq x \leq x_2$.

Оскільки $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, то (3) рівносильне умові

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \qquad (4)$$

де $x_1 < x < x_2$ і x_1, x_2 є довільні точки із $]a,b[$.

Нерівність (4) є іншою формою запису умови опуклості донизу функції f на $]a,b[$. Геометрично умова (4) означає (див. малюнок 2), що кутовий коефіцієнт хорди A_1A не перевищує кутового коефіцієнта хорди $AA_2, tg\theta_1 \leq tg\theta_2$.



Малюнок 2

Справедливі наступні твердження для опуклої на $]a,b[$ функції f:

1. в кожній точці x із $]a,b[$ функція f має ліву $f'_-(x)$ і праву $f'_+(x)$ похідні тобто існують скінченні границі

$$f'_-(x) := \lim_{h\to -0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ f'_+(x) := \lim_{h\to +0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

2. $(\forall x\in]a,b[)(f'_-(x)\le f'_+(x));$

3. $(\forall \{x_1,x_2\}\subset]a,b[)(x_1<x_2 \Rightarrow f'_+(x_1)\le f'_-(x_2));$

4. множина точок x із $]a,b[$, для яких $f'_-(x)\neq f'_+(x)$ не більш ніж зчисленна тобто функція f майже скрізь на $]a,b[$ диференційована.

Ці твердження доводяться на основі співвідношень (2), (4).

Аналогічні твердження можна сформулювати для вгнутої на $]a,b[$ функції f.

На основі співвідношення (4) доводиться твердження: диференційована на $]a,b[$ функція f опукла (опукла донизу) на $]a,b[$ тоді і лише тоді, коли її похідна $f' :]a,b[\to \boldsymbol{R}$ є неспадна функція на $]a,b[$.

Звідси зокрема випливає, що функція $f :]a,b[\to \boldsymbol{R}$, яка має на $]a,b[$ другу похідну f'', є опукла (опукла донизу) на $]a,b[$, тоді і лише тоді, коли $(\forall x\in]a,b[)(f''(x)\ge 0).$

Аналогічні твердження можна сформулювати для вгнутої (опуклої доверху) на $]a,b[$ функції f та для строго опуклої і строго вгнутої функцій.

<u>**Зауваження.**</u> Можна показати, що функція $f :]a,b[\to \boldsymbol{R}$ опукла (опукла донизу) на $]a,b[$ тоді і лише тоді, коли $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$

$(x \in]a,b[)$, де $\varphi :]a,b[\to R$ – неспадна на $]a,b[$ функція і x_0 – довільна точка із $]a,b[$.

§4. Узагальнення поняття опуклості функції.

Нехай $f_1 : X \to R, f_2 : X \to R$ є дві неперервні на відкритому проміжку $X, X \subset R$, функції змінної x. Якщо $\{x_1, x_2\} \subset X$, то позначимо через $\Delta_{f_1, f_2}(x_1, x_2)$ або через $\Delta(x_1, x_2)$ визначник

$$\Delta(x_1, x_2) := \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{vmatrix},$$

і будемо вважати, що виконується так умова: існує таке число $h > 0$, що $sign\Delta(x_1, x_2) = sign(x_1 - x_2)$, коли

$$|x_1 - x_2| < h. \qquad (1)$$

Очевидно,

$$\Delta(x_1, x_2) = -\Delta(x_2, x_1). \qquad (2)$$

Якщо $f_1(x) \equiv f(x),\ f_2(x) \equiv 1, x \in X$, то

$$\Delta(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} f(x_1) & 1 \\ f(x_2) & 1 \end{vmatrix} = f(x_1) - f(x_2).$$

Тому умова (1) в цьому випадку виконується для довільної строго зростаючої на X функції f при довільному $h > 0$.

Якщо $f_1(x) = \sin \rho x,\ f_2(x) = \cos \rho x, x \in X\ (\rho > 0)$, то

$$\Delta(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \sin \rho x_1 & \cos \rho x_1 \\ \sin \rho x_2 & \cos \rho x_2 \end{vmatrix} = \sin \rho(x_1 - x_2),$$

тобто в цьому випадку можна взяти $h = \frac{\pi}{\rho}$, оскільки $\left|\rho(x_1 - x_2)\right| < \pi$ для довільних точок x_1 та x_2 таких, що $\left|x_1 - x_2\right| < \frac{\pi}{\rho}$. Отже, для вказаних точок x_1, x_2 виконується умова (1) і $sign[\sin\rho(x_1 - x_2)] = sign(x_1 - x_2)$.

Припустимо, що неперервні функції f_1 та f_2 вибрані так, що для них виконується умова (1).

Розглянемо функцію $F : X \to R$. Взявши дві довільні точки x_1, x_2 із X такі, що $\left|x_1 - x_2\right| < h$, побудуємо функцію $\phi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, $x \in X$, де числа λ_1, λ_2 підібрані так, що $F(x_1) = \phi(x_1), F(x_2) = \phi(x_2)$. Якщо

$$(\forall\{x_1, x_2\} \subset X)(0 < x_2 - x_1 < h \Rightarrow (\forall x \in [x_1, x_2])(F(x) \le \phi(x)), \qquad (3)$$

то функція F називається $\{f_1, f_2\}$ – опуклою ($\{f_1, f_2\}$ – опуклою донизу) на X.

Якщо зокрема взяти $f_1(x) = x, f_2(x) \equiv 1(x \in X)$ (умова (1) для такої пари функцій виконується при довільному $h > 0$), то в цьому випадку співвідношення (3) прийме вигляд

$$F(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} F(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} F(x_2)$$

при довільних $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$ і довільному $x \in [x_1, x_2]$, тобто в цьому випадку $\{x, 1\}$ – опуклість – це звичайна опуклість (донизу) функції F на X.

Якщо взяти $f_1(x) = \ln x,\ f_2(x) \equiv 1, x \in X = \left]0, +\infty\right[$ (умова (1) в цьому випадку виконується при довільному $h > 0$), то при виконанні умови (3) функція $F(x), x \in X$, називається логарифмічно опуклою (донизу) на *X*. Отже, функція F логарифмічно опукла (донизу) на X, якщо

$$(\forall \{x_1, x_2\} \subset X)(\forall x \in [x_1, x_2])(F(x) \leq \frac{\ln x_2 - \ln x}{\ln x_2 - \ln x_1} F(x_1) + \frac{\ln x - \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} F(x_2)),$$

при умові, що $x_1 < x_2$.

Якщо $f_1(x) = \sin \rho x,\ f_2(x) = \cos \rho x, x \in X$ (в цьому випадку можна взяти $h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$), то при виконанні умови (3) функція $F(x), x \in X$, називається тригонометрично ρ – опуклою (донизу) на X. При $\rho = 1$ вона називається тригонометрично опуклою (донизу) на X. Отже, функція $F(x), x \in X$, тригонометрично ρ – опукла (донизу) на X, якщо для будь – яких точок $x_1, x_2, 0 < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{\rho}$ і для будь – якої точки $x, x_1 < x < x_2$, виконується $F(x) \leq \frac{\sin \rho(x_2 - x)}{\sin \rho(x_2 - x_1)} F(x_1) + \frac{\sin \rho(x - x_1)}{\sin \rho(x_2 - x_1)} F(x_2)$

або інакше, коли

$$F(x_1) \sin \rho(x - x_2) + F(x_2) \sin \rho(x_1 - x) + F(x) \sin \rho(x_2 - x_1) \leq 0.$$

Із самого означення $\{f_1, f_2\}$ – опуклої (донизу) функції F випливають наступні властивості таких функцій:

1) операції додавання (але не віднімання), граничного переходу, операції відшукання $\max$ і $\sup$ не виводять за межі класу $\{f_1, f_2\}$ – опуклих функцій;

2) якщо функція $F(x), x \in X$ є $\{f_1, f_2\}$ – опукла (донизу) на X, то вона неперервна на X.

Для логарифмічно опуклих та для тригонометрично ρ – опуклих функцій можна довести і ряд більш тонких властивостей.

Зауваження. Неважко переконатися в тому, що $\{f, 1\}$ – опуклість (донизу) функції $F(x), x \in X$, рівносильна звичайній опуклості (донизу) функції $F(f^{-1}(u))$. Зокрема логарифмічна опуклість (донизу) функції $F(x), x \in X$, рівносильна звичайній опуклості (донизу) функції $F(e^u)$.

§5. Ціла функція та її максимум модуля.

Однозначна функція $f : C \to C$, що аналітична в C, називається цілою функцією.

Цілими функціями є зокрема алгебраїчний многочлен m-го степеня $P_m(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$, ($a_m \neq 0$, $m \geq 0$), стала $f(z) \equiv h = const$, а також функції $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\exp(\exp z)$ $(z \in C)$.

Оскільки ціла функція аналітична в C тобто в відкритому крузі радіуса $R = +\infty$ з центром в точці $z = 0$, то вона в цьому крузі зображається степеневим рядом, який є її рядом Тейлора, а саме:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ (z \in C). \tag{1}$$

Оскільки цей степеневий ряд має радіус збіжності $R = +\infty$, то, внаслідок формули Коші – Адамара, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Тоді із співвідношень

$0 \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ випливає, що

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \tag{2}$$

Отже, коефіцієнти степеневого ряду (1), що зображує цілу функцію *f*, задовольняють умову (2). Навпаки, із умови (2) випливає, що радіус збіжності степеневого ряду (1) дорівнює + ∞, $R = +\infty$. Отже, цей ряд задає цілу функцію. Таким чином, співвідношення (2) є необхідна і достатня умова того, щоб сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ була цілою функцією.

<u>Приклади:</u> 1. Степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ задає цілу функцію, оскільки в цьому випадку $a_n = \frac{1}{n^n}$ і $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

2. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ задає функцію, що не є цілою, оскільки $a_n = \frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \ (n \to \infty)$.

3. Функція $f(z) := \cos(\sqrt{z})$, $(z \in C)$, є ціла, оскільки вона однозначна і аналітична в *C*, що випливає із її степеневого розкладу $\cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{z}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$, $(z \in C)$.

4. Функція $\psi(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, \ при \ z \neq 0 \\ 1, \ при \ z = 0 \end{cases}$ $(z \in C)$ є ціла, оскільки вона визначена і аналітична в *C*, як сума наступного степеневого ряду $\psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \quad (z \in C)$.

5. Функція $g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \text{при } z\neq 0\\ 1, \text{при } z=0\end{cases}$ $(z\in C)$ є ціла, оскільки вона є сумою степеневого ряду $g(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{(2n+1)!}$ $(z\in C)$.

Зазначимо, що ціла функція, яка відмінна від сталої і многочленна, називається цілою трансцендентною функцією. Наприклад, $\exp z$, $\cos z$ $(z\in C)$ є цілі трансцендентні функції.

Важливою характеристикою цілої функції f є дійсна функція $M(r;f):=\max\{|f(z)|\,|z|\le r\}$, $r\in[0;+\infty[$, яка інакше позначається $M_f(r)$. Згідно із принципом максимума модуля аналітичної функції, можна записати рівність $M_f(r)=\max\{|f(z)|\,|z|=r\}=\max\limits_{z\in\Gamma_r(0)}\{|f(z)|\}$, де $\Gamma_r(0)$ - коло радіуса r з центром $z=0$.

Знаходження $\mathrm{M}(r;f)$ пов'язане з багатьма труднощами. Тому часто обмежуються лише оцінками цієї величини. Однак для деяких цілих функцій не складно знайти $\mathrm{M}(r;f)$ або оцінити його.

<u>Приклади:</u> 6. Оскільки $|\exp z|=|e^x\cdot e^{iy}|=e^x=e^{\mathrm{Re}\,z}\le e^{|z|}\le e^r$ для всіх точок $z=x+iy$ із $\overline{K_r(0)}$ і $|\exp r|=e^r$, то $M(r;\exp z)=e^r$, $r\ge 0$ (тут $K_r(0):=\{z\in C\,|z|<r\}$).

7. Для алгебраїчного многочлена $P_n(z):=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0)$, $z\in C$, виконується

$$\left|P_n(z)\right| = \left|a_n\right| \cdot \left|z\right|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot z^{-n}\right| = \left|a_n\right| \cdot \left|z\right|^n \left|1 + o(1)\right| \quad (z \to \infty).$$

Тому

$$\mathrm{M}(r; P_n) := \max\{\left|P_n(z)\right| \left|z\right| = r\} = \left|P_n(re^{i\varphi(r)})\right| = \left|a_n\right| r^n \left|1 + o(1)\right| \quad (r \to \infty).$$

Таким чином $M(r; P_n) = \left|a_n\right| r^n (1 + 0(1))$ або інакше

$M(r; P_n) \sim \left|a_n\right| r^n \quad (r \to \infty)$ тобто $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{M(r; P_n)}{\left|a_n\right| r^n} = 1$.

Іншими словами поведінка $M(r; P_n)$ при $r \to \infty$ визначається поведінкою старшого члена $a_n z^n$ многочлена $P_n(z)$.

8. Функція $F(z) := \int\limits_0^1 \exp(zt^2) dt$, $z \in C$ є ціла функція, оскільки функція $f(z;t) = \exp(zt^2), (z;t) \in C \times [0,1] = E$, аналітична, як функція змінної z, $z \in C$, при фіксованому $t \in [0,1]$ і неперервна, як функція змінних t та z в E. Для неї $\left|F(z)\right| \le \int\limits_0^1 \exp(\left|z\right| t^2) dt, z \in C$. Тому для всіх точок z із $\overline{K_r(0)}$ виконується $\left|F(z)\right| \le \int\limits_0^1 e^{rt^2} dt$. Оскільки при $z=r$ справедлива рівність $\left|F(r)\right| = \int\limits_0^1 e^{rt^2} dt$, то $M(r; F) = \int\limits_0^1 e^{rt^2} dt$, $r \ge 0$.

9. Для цілої функції $f(z) = \cos z, z \in C$, як відомо, $\left|f(z)\right| = \sqrt{ch^2 y - \sin^2 x}$, при $z = x + iy \in C$. Звідси $\left|f(z)\right| \le chy (z \in C)$ тобто

для усіх точок $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_r(0)$ виконується $\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le ch(r\sin\varphi) \le chr$.

Однак $\left|f(ri)\right| = \sqrt{ch^2(r) - \sin^2 0} = chr$. Отже, $M(r;\cos z) = chr, r \ge 0$.

10. Міркуючи, як і в попередньому прикладі і виходячи із рівності $|\sin z| = \sqrt{ch^2 y - \cos^2}$ $(z = x + iy \in C)$, можна показати, що $M(r;\sin z) = shr, \quad r \ge 0.$

При знаходженні $M_f(r)$ корисною може бути наступна теорема.

<u>Теорема.</u> Для цілої функції f і її максимума модуля $M(r; f)$ справедливі твердження:

1) якщо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in C,$ де $a_n \ge 0 \quad (n \in N)$, то $M(r; f) = f(r);$

2) якщо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n, \quad z \in C,$ де $a_n \ge 0 \quad (n \in N)$, то $M(r; f) = f(-r);$

3) якщо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^{2n+1}, \quad z \in C,$ де $a_n \ge 0 \quad (n \in N)$, то $M(r; f) = |f(ir)|;$

4) якщо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^{2n}, \quad z \in C,$ де $a_n \ge 0 \quad (n \in N)$, то $M(r; f) = f(ir).$

Доведення. При виконанні умов твердження 1) для всіх $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_r(0)$ дістанемо

$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(r) = |f(r)|$. Тому $M(r; f) = f(r).$

При виконанні умов твердження 2) для всіх $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_r(0)$ дістанемо

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(-r) = |f(-r)|,$$

тобто $M(r; f) = f(-r)$.

При виконанні умов твердження 3) для всіх $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_r(0)$ дістанемо

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^{2n+1}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n+1} = |f(ir)|,$$

тобто $M(r; f) = |f(ir)|$.

При виконанні умов твердження 4) для всіх $z = re^{i\varphi} \in \Gamma_r(0)$ дістанемо

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^{2n}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} = f(ir) = |f(ir)|.$$

тобто $M(r; f) = f(ir)$.

Теорему доведено.

§6. Порядок та тип цілої функції.

Як випливає із відомої теореми Ліувілля $\lim\limits_{r\to+\infty} M_f(r) = +\infty$ для кожної цілої функції f , $f \ne const$. Більше того, як можна показати, для трансцендентної цілої функції f справедлива рівність

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r} = +\infty. \qquad (1)$$

Звідси зокрема випливає, що для вказаної функції

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{r^{\mu}} = +\infty \qquad (2)$$

при кожному $\mu > 0$. Ці рівності доводяться на основі нерівностей Коші для коефіцієнтів степеневого розкладу цілої функції. Із рівності (2) випливає, що степенева функція $\varphi(r) = r^{\mu}, r \in [0,+\infty[$, де $\mu > 0$, не придатна для оцінки росту максимума модуля $M_f(r)$ трансцендентної цілої функції f. Тому для такої оцінки використовується найбільш проста із швидко зростаючих функцій, а саме функція $\psi(r) := e^r, r \geq 0$.

Нехай дано дві функції $\varphi_1 : [0,+\infty[\to R$, $\varphi_2 : [0,+\infty[\to R$. Говорять, що функція φ_1 менша функції φ_2 асимптотично при $r \to +\infty$ і пишуть $\varphi_1(r) \overset{as}{<} \varphi_2(r)$ $(r \to +\infty)$, якщо $(\exists r_0 \in R)(\forall r > r_0)(\varphi_1(r) < \varphi_2(r))$. Це ж саме можна сказати про дві послідовності $x_n = \varphi_1(n)$, $y_n = \varphi_2(n)(n \in N)$. А саме, $x_n \overset{as}{<} y_n \Leftrightarrow (\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(x_n < y_n)$.

Якщо для цілої функції f існують такі числа $\mu, \mu > 0$ і $r_0, r_0 > 0$, що $(\forall r > r_0)\left(M_f(r) < e^{r^{\mu}}\right)$ тобто $M_f(r) \overset{as}{<} e^{r^{\mu}}$, то f називається цілою функцією скінченного порядку. В протилежному випадку тобто, коли $(\forall \mu > 0)(\exists (r_n) \uparrow +\infty)\left(M_f(r_n) \overset{as}{>} e^{r_n^{\mu}}\right)$, функція f називається цілою функцією нескінченного порядку.

Наприклад, $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}, z \in C$, є ціла функція скінченого порядку, оскільки $|f(z)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = e^r$ для всіх точок z таких, що $|z| = r$. Отже, $M_f(r) < e^r (r \ge 0)$. Функція $\psi(z) := \exp(\exp z)$, $z \in C$, є ціла функція нескінченного порядку, оскільки $\psi(r) = e^{e^r}$ і, отже, $M_\psi(r) \ge e^{e^r} > e^{r^\mu} (r > r_0)$.

Якщо f – ціла функція скінченого порядку, то позначимо $D_f := \left\{ \mu > 0 \middle| M_f(r) \overset{as}{<} e^{r^\mu} \right\}$. Тоді число $\rho = \rho[f] := \inf D_f$ називається порядком або порядком росту цілої функції f. Очевидно, завжди $\rho[f] \ge 0$. Якщо число $\rho, \rho \in R$, є порядок цілої функції f, то $(\forall \varepsilon > 0)\left(M_f(r) \overset{as}{<} e^{r^{\rho+\varepsilon}} \right)$, оскільки $\rho + \varepsilon \in D_f$. Водночас $(\forall \varepsilon > 0)(\exists (r_n) \uparrow +\infty)\left(M_f(r_n) \overset{as}{>} e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \right)$, оскільки $\rho - \varepsilon \notin D_f, \rho - \varepsilon \ne \rho$. Із останніх асимптотичних нерівностей випливає, що $\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \overset{as}{<} \rho + \varepsilon$, $\frac{\ln \ln M_f(r_n)}{\ln r_n} \overset{as}{>} \rho - \varepsilon$. А це означає, що справедлива рівність

$$\rho = \rho[f] = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}. \qquad (3)$$

Формула (3) дає можливість знаходити порядок цілої функції скінченого порядку.

Зазначимо, що у випадку цілої функції f нескінченного порядку, вважають, що її порядок дорівнює $+\infty$, $\rho = \rho[f] = +\infty$. Формула (3) справедлива і в цьому випадку.

Зауважимо, що формула (3) може відігравати також роль означення порядку цілої функції f (включаючи і випадок, коли $\rho[f] = +\infty$).

Оскільки $M(r, \exp z) = e^r$ і $\ln r = \ln\ln M(r, \exp z)$, то формулу (3) можна записати у вигляді $\rho = \rho[f] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln M(r, \exp z)}$, звідки випливає, що порядок цілої функції f є верхня границя (при $r \to +\infty$) відношення повторного логарифма $M(r; f)$ до повторного логарифма $M(r, \exp z)$.

Якщо ціла функція f має порядок ρ, $0 \le \rho < +\infty$, і $(\exists K > 0)\left(M_f(r) \overset{as}{<} e^{Kr^\rho} \right)$, то говорять, що f є ціла функція скінченого типу (скінченої величини типу). В протилежному випадку тобто, коли $(\forall K > 0)(\exists (r_n) \uparrow +\infty)\left(M_f(r_n) \overset{as}{>} e^{Kr_n^\rho} \right)$, ціла функція f порядку ρ називається цілою функцією нескінченного (максимального) типу.

Якщо f - ціла функція порядку ρ, $0 \le \rho < +\infty$, і скінченого типу, то позначимо $L_f := \left\{ K > 0 \middle| M_f(r) \overset{as}{<} e^{Kr^\rho} \right\}$. Тоді число $\sigma = \sigma[f] := \inf L_f$ називається величиною типу цілої функції f. При цьому, якщо $\sigma = 0$, то говорять, що f є ціла функція мінімального типу. Якщо $0 < \sigma < +\infty$, то говорять, що f є ціла функція нормального (середнього) типу.

Якщо f є ціла функція скінченої величини типу $\sigma, 0 \le \sigma < +\infty$, при порядку $\rho, 0 \le \rho < +\infty$, то $(\forall \varepsilon > 0)\left(M_f(r) \overset{as}{<} e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho} \right)$, оскільки $\sigma + \varepsilon \in L_f$. Водночас $(\forall \varepsilon > 0)(\exists (r_n) \uparrow +\infty)\left(M_f(r_n) \overset{as}{>} e^{(\sigma-\varepsilon)r_n^\rho} \right)$, оскільки $\sigma - \varepsilon \notin L_f$, $\sigma - \varepsilon \ne \sigma$. Із останніх асимптотичних нерівностей випливає, що $\dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \overset{as}{<} \sigma + \varepsilon$, $\dfrac{\ln M_f(r_n)}{r_n^\rho} \overset{as}{>} \sigma - \varepsilon$. А це означає, що справедлива рівність

$$\sigma = \sigma[f] = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \qquad (4)$$

Формула (4) дає можливість знаходити величину типу цілої функції f порядку $\rho, \rho \in R$.

Зазначимо, що у випадку цілої функції f нескінченного типу вважають, що $\sigma = \sigma[f] = +\infty$ і говорять, що f має максимальний тип. Очевидно, завжди $\sigma[f] \geq 0$.

Формула (4) справедлива і у випадку, коли $\sigma[f] = +\infty$. Зазначимо, що формула (4) може відігравати також роль означення величини типу цілої функції f (включаючи і випадок $\sigma[f] = +\infty$).

Зауважимо, що ціла функція $f, f \neq \text{const}$, нульового порядку, $\rho[f] = 0$, має максимальний тип, $\sigma[f] = +\infty$. Це випливає із співвідношення

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^0} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \ln M_f(r) = +\infty ,$$

внаслідок теореми Ліувілля.

<u>Приклади:</u> 1. Якщо $f(z) = \exp z, z \in C$, то $\rho[f] = 1$, $\sigma[f] = 1$, оскільки

$\inf\{\mu > 0 | M_f(r) = e^r \overset{as}{<} e^{r^\mu}\} = 1$ і

$\inf\{K > 0 \ | M_f(r) = e^r \overset{as}{<} e^{Kr}\} = 1$. Отже, дана функція має порядок 1, середній тип і величину типу 1.

2. Для алгебраїчного многочлена $P_n(z) := a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ ($a_n \neq 0$), $z \in C$, степеня n, як відомо, справедливе $M(r; P_n) \sim |a_n| r^n (r \to +\infty)$ тобто

$M(r; P_n) = |a_n| r^n (1 + o(1))(r \to +\infty)$. Тому

$\ln M(r; P_n) = \ln|a_n| + n\ln r + \ln(1 + o(1)) = n\ln r + O(1) + o(1) = n\ln r + O(1), r \to +\infty$, і

$$\ln\ln M(r;P_n)=\ln\left[(n\ln r)(1+o(1))\right]=\ln n+\ln\ln r+o(1)=\ln\ln r+O(1)(r\to+\infty).$$

Отже, $\rho[P_n]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln\ln r+O(1)}{\ln r}=o$, якщо скористатися правилом Лопіталя. Отже, многочлени є ціла функція порядку 0 і, згідно із попереднім, максимального типу, $\sigma[P_n]=+\infty$.

3. Для цілої функції $f(z)$ = cos z, z є C, як відомо, $M_f(r)=chr$, $r\geq 0$. Тому

$$\ln M_f(r)=\ln\frac{e^r+e^{-r}}{2}=\ln e^r(1+e^{-2r})-\ln 2=r+\ln(1+e^{-2r})-\ln 2=r+O(1), r\to+\infty,$$ і

$$\ln\ln M_f(r)=\ln\left[r(1+\frac{O(1)}{r})\right]=\ln r+\ln(1+o(1))=\ln r+o(1), r\to\infty.$$

Тому $\rho=\rho[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\ln r+o(1)}{\ln r}=1$, $\sigma=\sigma[f]=\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{r+O(1)}{r}=1$, тобто функція cos z, z є C, має порядок 1, середній тип і величину типу 1, $\sigma[f]=1$.

4. Міркуючи як і при розгляді попереднього прикладу, і використовуючи рівність $M(r,\sin z)=shr$, $r\geq 0$, можемо показати, що $\rho[f]=1$, $\sigma[f]=1$, для цілої функції $f(z)$=sin z.

5. Оскільки $\cos\sqrt{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{(2n)!}, z\in C$, то внаслідок твердження 2) із останньої теореми попереднього параграфа

$$M\left(r,\cos\sqrt{z}\right)=\cos\sqrt{-r}=\cos\left(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{r}\right)=\cos\left(i\sqrt{r}\right)=chr, r\geq 0.$$

Тому

$$\ln M\left(r,\cos\sqrt{z}\right)=\ln\frac{e^{\sqrt{r}}+e^{-\sqrt{r}}}{2}=\ln\frac{e^{\sqrt{r}}\left(1+e^{-2\sqrt{r}}\right)}{2}=\sqrt{r}+\ln\left(1+e^{-2\sqrt{r}}\right)-\ln 2=\sqrt{r}+O(1),$$ і

$r\to+\infty$,

$\ln\ln M\left(r,\cos\sqrt{z}\right)=\ln\left[\sqrt{r}\left(1+o(1)\right)\right]=\frac{1}{2}\ln r+o(1), r\to+\infty$. Отже,

$\rho[f]=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\frac{1}{2}\ln r+o(1)}{\ln r}=\frac{1}{2}, \sigma[f]=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\sqrt{r}+O(1)}{\sqrt{r}}=1,$ для цілої функції $f(z)=\cos\sqrt{z}.$

6. Оскільки, як можна показати, $M_f(r)=e^{e^r}, r\geq 0$,для цілої функції $f(z)=\exp(\exp z)$, то $\rho[f]=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{r}{\ln r}=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{r}}=+\infty$.

§7. Властивості функції $M_f(r)$.Порядок і тип похідної цілої функції.

<u>**Теорема 1.**</u> Для довільної цілої функції $f, f\neq const$, справедливі твердження:

1) функція $M_f(r), r\geq 0$ є строго зростаюча на [0;+∞[;
2) функція $M_f(r), r\geq 0$, є неперервна на [0;+∞[;
3) функція $\ln M_f(r), r\geq 0$, є логарифмічно опукла(до низу) на]0;+∞[.

Доведення. Якщо $0\leq r_1<r_2$, то $M_f(r_1)\leq M_f(r_2)$, згідно із принципом максимуму модуля аналітичної функції $\left(\overline{K_{r_1}(0)}\subset\overline{K_{r_2}(0)}\right)$. Рівність в попередньому співвідношенні не може реалізовуватися, бо припустивши $M_f(r_1)=M_f(r_2)$ дістали б точку $z_0=r_1e^{i\varphi_0}\in\Gamma_{r_1}(0)$ таку, що $|f(z_0)|=M_f(r_1)=M_f(r_2)$, яка знаходиться всередині круга $K_{r_2}(0)$. А це суперечить принципу максимуму модуля аналітичної функції. Отже, справедливе твердження 1).

Функція $|f(z)|$, $z \in \overline{K_R(0)}$, неперервна на $\overline{K_R(0)}$. Тому вона і рівномірно неперервна на $\overline{K_R(0)}$ тобто $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall \{z', z''\} \subset \overline{K_R(0)})$ $(|z'-z''| < \delta \Rightarrow \| f(z')| - |f(z'')\| < \varepsilon)$. Зафіксувавши число $r_0, 0 < r_0 < R$, виберемо довільне число r_2, $r_0 < r_2 < R$, так, що $0 < r_2 - r_0 < \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} M_f(r_2) - M_f(r_0) &= \left\| f\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) \right| - \left| f\left(r_0 e^{i\varphi_0}\right) \right\| \leq \\ &\leq \left\| f\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) \right| - \left| f\left(r_0 e^{i\varphi_2}\right) \right\| < \varepsilon \end{aligned} \qquad (1),$$

де $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ такі точки, що $|f(z_0)| = M_f(r_0)$, $|f(z_2)| = M_f(r_2)$, оскільки $\left| r_2 e^{i\varphi_2} - r_0 e^{i\varphi_2} \right| < \delta$.

Якщо тепер взяти довільне число $r_1, 0 < r_1 < r_0$, таке, що $0 < r_0 - r_1 < \delta$, то, внаслідок (1), можна стверджувати, що

$$M_f(r_0) - M_f(r_1) < \varepsilon. \qquad (2)$$

Із (1), (2) випливає неперервність функції $M_f(r)$ в точці r_0. Отже, справедливе твердження 2).

Твердження 3) доводиться на основі відомої теореми Адамара про три круги, згідно з якою

$$\ln M_f(r) \leq \frac{\ln r - \ln r_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \cdot \ln M_f(r_1) + \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \cdot \ln M_f(r_2)$$

для довільних $r_1, r, r_2 \left(0 < r_1 < r < r_2 < +\infty\right)$.

<u>Теорема 2.</u> Порядки і величини типів цілої функції f і її похідної f' рівні між собою тобто $\rho[f]=\rho[f'],\ \sigma[f]=\sigma[f']$.

Доведення. Для многочленна сформульоване твердження очевидне. Оскільки при фіксованому z із C буде $f(z)-f(0)=\int\limits_{[0;z]} f'(\zeta)d\zeta$ тобто $f(z)=\int\limits_{[0;z]} f'(\zeta)d\zeta+f(0)$, то $|f(z)|\le|f(0)|+\int\limits_{[0;\zeta]}|f'(\zeta)||d\zeta|$, де $[0;z]$ - відрізок, що сполучає точки 0 і z. Тому

$$M(r,\ f)=\max\left\{|f(z)|\,\middle|\,z\in\overline{K_r(0)}\right\}\le|f(0)|+$$
$$+\int\limits_{[0;z]}\max\left\{|f'(\zeta)|\,\middle|\,\zeta\in\overline{K_r(0)}\right\}|d\zeta|=|f(0)|+M(r,\ f')r. \quad (3)$$

З іншого боку, оскільки $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\delta(z)}\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$, де δ – довільне додатне число, то

$$|f'(z)|\le\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta(z)}\frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta-z|^2}\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot 2\pi\delta\cdot\max\{|f(\zeta)||\zeta\in\Gamma_\delta(z)\}=$$

$=\dfrac{1}{\delta}\max\{|f(\zeta)||\zeta\in\Gamma_\delta(z)\}$. Звідси випливає, що

$$M(r,\ f')=\max\{|f'(z)||z\in\Gamma_r(0)\}\le\frac{1}{\delta}\max\{|f(\zeta)||\zeta\in\Gamma_{r+\delta}(0)\}=\frac{1}{\delta}M(r+\delta,\ f). \quad (4)$$

Із нерівності (3) випливає, що

$$\ln M(r,\ f)\le\ln[M(r,\ f')(r+o(1))]=(\ln M(r,\ f'))(1+o(1)), \qquad (5)$$

якщо f є трансцендентна ціла функція. Тому $\ln\ln M(r, f) \le \ln\ln M(r, f') + o(1)(r \to \infty)$. Отже, $\rho[f] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r, f)}{\ln r} \le \rho[f']$.

Із нерівності (4) випливає, що $\ln M(r, f') \le (\ln M(r+\delta, f))(1+o(1))(r \to \infty)$. (6)

Тому $\ln\ln M(r, f') \le \ln\ln M(r+\delta, f) + o(1)(r \to +\infty)$. Отже,

$$\rho[f'] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r, f')}{\ln r} \le \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r+\delta, f)}{\ln(r+\delta)} \cdot \frac{\ln(r+\delta)}{\ln r} =$$
$$= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(r+\delta, f)}{\ln(r+\delta)} = \rho[f].$$

Із нерівностей $\rho[f] \le \rho[f'], \rho[f'] \le \rho[f]$ випливає, що $\rho[f'] = \rho[f]$. Позначивши $\rho[f] = \rho[f'] = \rho < +\infty$, із нерівності (5) дістанемо, що $\sigma[f] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho} \le \overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\frac{\ln M(r, f')}{r^\rho}(1+o(1)) \right) = \sigma[f']$, якщо $\rho \ne 0$. Із нерівності (6) дістаємо

$$\sigma[f'] = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M(r, f')}{r^\rho} \le \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M(r+\delta, f)}{(r+\delta)^\rho} \cdot \frac{(r+\delta)^\rho}{r^\rho} \cdot (1+0(1)) = \sigma[f].$$

Із нерівностей $\sigma[f] \le \sigma[f'], \sigma[f'] \le \sigma[f]$ випливає, що $\sigma[f] = \sigma[f']$.

Якщо $\rho[f] = 0$, то із нерівності $\rho[f'] \le \rho[f]$ випливає, що $\rho[f'] = 0$. Теорему доведено.

Із доведеної теореми зокрема випливає рівність порядків і величин типу таких пар цілих функцій: $\sin z$ і $\cos z$, $\exp\left(-z^3\right)$ і $-3z^2\exp\left(-z^3\right)$, $\cos\sqrt{z}$ і $\frac{\sin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$, $\exp(\sin z)$ і $\cos z\exp(\sin z)$. В наступному параграфі теорему 2 доведемо іншим способом.

§8. Порядок і величина типу цілої функції та коефіцієнти її степеневого розкладу.

Як відомо, для цілої функції f справедливий наступний її розклад в степеневий ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad (|z|<+\infty), \qquad (1)$$

причому коефіцієнти c_n цього розкладу задовольняють умову $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$.

В теорії цілих функцій важливу роль відіграє наступне твердження.

__Теорема.__ Якщо ціла функція f має степеневий розклад виду (1), то її порядок $\rho[f]=\rho$ обчислюється з допомогою формули

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_n\ , \qquad (2)$$

де $\alpha_n=\frac{n\ln n}{-\ln|c_n|}$ при $c_n\neq 0$ і $\alpha_n=0$, якщо $c_n=0$ (включаючи і випадок цілої функції нескінченного порядку). Якщо ця функція має скінчений порядок $\rho, 0 < \rho < +\infty$, то величину її типу $\sigma[f] = \sigma$ можна обчислити за формулою

$$(\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}. \qquad (3)$$

Остання формула справедлива і у випадку цілої функції скінченного порядку $\rho, 0 < \rho < +\infty$, і нескінченного типу.

Зазначимо, що формули (2), (3) дають можливість побудувати цілу функцію із наперед заданими порядком і величиною типу.

<u>Приклади:</u> 1. Функція $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n$, де ρ, σ - фіксовані додатні числа, є ціла функція порядку $\rho, \rho[f] = \rho$, і із величиною типу $\sigma, \sigma[f] = \sigma$. Це випливає із співвідношень:

$$c_n = \left(\frac{\sigma e \rho}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}, \sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{\sigma e \rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \to 0 (n \to \infty),$$

$$\rho[f] = \rho \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln n + \ln(\sigma e \rho)} = \rho,$$

$$\sigma = \sigma[f] = \frac{1}{e\rho}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{\rho} = \frac{1}{e\rho}\left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho} = \frac{1}{e\rho} e\sigma\rho = \sigma.$$

2. Функція $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n \left(0 < \rho < +\infty\right)$ є ціла функція порядку ρ і максимального типу, $\sigma[f] = +\infty$. Це випливає із співвідношень:

$$c_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}, \sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \to 0(n \to \infty),$$

$$\rho[f] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\rho \ln n}{(\ln n - \ln\ln n)} = \rho,$$

$$\sigma[f] = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho} \cdot \frac{1}{e\rho} = \frac{1}{e\rho}\left(\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho} = +\infty.$$

3. Функція $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{n}{\rho}} \cdot z^n, 0 < \rho < +\infty$, є ціла функція порядку ρ і мінімального типу, $\sigma[f] = 0$. Це випливає із наступних співвідношень: $c_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{n}{\rho}}, \sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \to 0(n \to \infty)$,

$$\rho[f] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\rho \ln n}{(\ln n + \ln\ln n)} = \rho,$$

$$(\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\rho}} = +\infty, \sigma[f] = \sigma = +\infty.$$

4. Функція $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^{n^2}}$ є ціла трансцендентна функція нульового порядку, $\rho[f] = 0$. Це випливає із співвідношень: $c_n = \frac{1}{e^{n^2}}$, $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{e^n} \to 0(n \to \infty), \rho[f] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Зрозуміло, що ця функція має максимальний тип, $\sigma[f] = +\infty$.

5. Функція $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{(\ln n)^n}$ є ціла функція нескінченного порядку, $\rho[f]=+\infty$. Це випливає із співвідношень: $c_n=\frac{1}{(\ln n)^n}, \sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{\ln n}\to 0$

$(n\to\infty), \rho[f]=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln n}=+\infty$.

<u>Зауваження 1.</u> На основі сформульованої теореми можна вказати інше доведення того твердження, що при диференціюванні цілої функції порядок і величина типу одержаної функції такі самі, як і у вихідної функції.

Справді, якщо ціла функція f має представлення (1), то $zf'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$, де $b_n:=nc_n(n\in N)$. Цілі функції $f'(z)$ і $zf'(z)$ мають однакові порядки і величини типів, оскільки $M(r,zf'(z))=rM(r,f'(z)), r\geq 0$. Тоді $\rho[f'(z)]=\rho[zf'(z)]=$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{-\ln|b_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{-\ln|nc_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{-\ln|c_n|-\ln n}=$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{-(\ln|c_n|)(1+o(1))}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{-\ln|c_n|}=\rho[f].$$

$$\sigma[f'(z)]=\sigma[zf'(z)]=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|b_n|}\right)^{\rho}\cdot\frac{1}{e\rho}=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{\rho}\cdot\frac{1}{e\rho}=\sigma[f(z)].$$

Зауваження 2. Зазначимо, що при застосуванні формул (2), (3) часто корисною буває наступна формула Стірлінга:

$$\Gamma(\alpha n+1)=\left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n}\cdot\sqrt{2\pi n\alpha}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$n\to\infty$, де $\alpha>0$. Із цієї формули при $\alpha=1$ випливає, що $\Gamma(n+1)=n!=$

$=\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2\pi n}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right), n\to\infty$. Тут $\Gamma(x)$ - відома гама-функція Ейлера.

§9. Максимальний член цілої функції.

Для цілої функції f,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,(z\in C) \qquad (1)$$

справедлива рівність $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\,z^n=0$ при фіксованому $r, r\geq 0$, де $r=|z|$. Тому серед чисел $|a_n|\,z^n(n\in N)$ існує максимальне число, яке позначимо через $m_f(r), m_f(r):=\max\{|a_n|r^n\,|n=0,1,2,...\}$ і будемо називати максимальним членом функції f. При цьому число $s=s(r)$ таке, що $m_f(r)=|a_{s(r)}|r^{s(r)}$ називається центральним індексом. Якщо серед чисел $|a_n|\,z^n(n\in N)$ існує кілька рівних $m_f(r)$, то під s розуміють найбільший із відповідних індексів. Очевидно, $s(r)\to+\infty(r\to+\infty)$.

Теорема. Для цілої функції f виду (1), яка має скінчений порядок, справедлива рівність

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln m_f(r)}=1,$$

де $M_f(r)=\max\{|f(z)||z\in\Gamma_r(0)\}$, тобто

$\ln M_f(r)\sim\ln m_f(r)(r\to+\infty)$.

<u>Доведення</u>. Оскільки функція f має скінчений порядок, то $(\exists K>0)(\exists\gamma>0)(\forall r\ge 0)(M_f(r)<Ke^{r^\gamma})$. В силу нерівностей Коші $|a_n|\le M_f(r)r^{-n}<Ke^{r^\gamma}r^{-n}=K\exp(r^\gamma-n\ln r)=Ke^{\psi(r)}$, де $\psi(r)=r^\gamma-n\ln r(r>0)$ і $n=0,1,2,\ldots$.

Тоді $\psi'(r)=\gamma r^{\gamma-1}-nr^{-1}=\dfrac{\gamma r^\gamma-n}{r}(r>0)$ і $\psi'(r)=0$ лише при $r=r_0=r_0(n):=\left(\dfrac{n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Оскільки $\psi(r)\to+\infty(r\to+\infty)$ і $\psi(r)\to+\infty(r\to 0+0)$, то функція $\psi(r)$ і разом з нею функція $Ke^{\psi(r)}$ досягає свого мінімума в точці r_0. Тому

$$|a_n|<Ke^{\psi(r_0)}=K\left(\frac{\gamma e}{n}\right)^{\frac{n}{\gamma}}(n=1,2,\ldots).$$

Позначивши через $\upsilon=\upsilon(r)$ число $\gamma e(2r)^\gamma$, дістанемо

$$|a_n|r^n<K\left(\frac{\gamma e}{\upsilon(r)}\right)^{\frac{n}{\gamma}}r^n=K2^{-n}(n\ge\upsilon(r)).$$

Тоді

$$M_f(r) \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n<\upsilon(r)} |a_n| r^n + \sum_{n\ge\upsilon(r)} |a_n| r^n < \upsilon(r) m_f(r) + K \sum_{n\ge\upsilon(r)} 2^{-n} \le \upsilon(r) m_f(r) + K$$

Отже,

$\ln M_f(r) < \ln m_f(r) + \ln \upsilon(r) + o(1), r \to +\infty$. Оскільки $\upsilon(r) = \gamma e(2r)^{\gamma}$, то $\ln M_f(r) < \ln m_f(r) + O(\ln r)(r \to +\infty)$.

В силу співвідношення $m_f(r) \le M_f(r)$, дістаємо

$$1 \le \frac{\ln M_f(r)}{\ln m_f(r)} < 1 + O\left(\frac{\ln r}{\ln m_f(r)}\right)(r \to +\infty).$$

Отже, $\ln M_f(r) \sim \ln m_f(r)(r \to +\infty)$ для трансцендентної цілої функції f. У випадку, коли f є алгебраїчний многочлен, теорема очевидна.

Зауваження. Доведена теорема дає можливість означити порядок $\rho = \rho[f]$ цілої функції f з допомогою формули

$$\rho[f] := \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln m_f(r)}{\ln r}.$$

Аналогічне означення (через функцію $m_f(r)$) можна сформулювати і для величини типу цілої функції f.

Література

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 175 с.

4. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

5. Маркушевич А. И. Целые функции. – М.: Наука, 1975. – 119 с.

6. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов, Изд-во Львовского госуниверситета, 1988. – 195 с.

Навчальне видання

Микола Євгенович Коренков
Ірина Петрівна Головенко

Цілі функції
(спецкурс)

Літературний редактор – Л. І. Філозоф